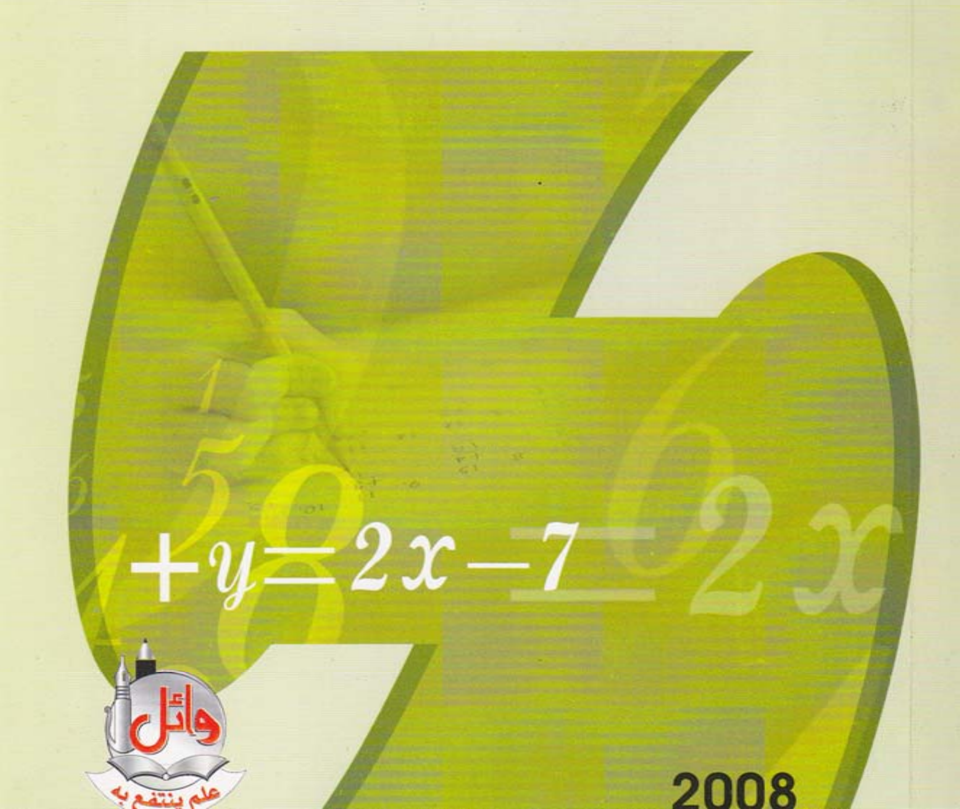
أساسيات
التفاضل والتكامل

الأستاذ فتحي خليل حمدان



2008

أساسيات
التفاضـــل والتكـامل

أساسيات

التفاضل والتكامل

فتحي خليل حمدان

دار وائل للنشر

الطبعة الرابعة

2008

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : (2001/9/1807)
حمدان ، فتحي خليل
أساسيات التفاضل والتكامل / فتحي خليل حمدان . - عمان ، دار وائل ، 2001 .
(283) ص
ر.إ. : (2001/9/1807)
الواصفات: التفاضل والتكامل
* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

****

رقم التصنيف العشري / ديوي : 515.1
ISBN 9957-11-223-6 (ردمك)

* أساسيات التفاضل والتكامل
* فتحي خليل حمـدان
* الطبعــة الرابعة 2008



دار وائــل للنشر والتوزيع

* الأردن – عمان – شارع الجمعية العلمية الملكية – مبنى الجامعة الاردنية الاستثماري رقم (2) الطابق الثاني
هـاتف : 00962-6-5338410 – فاكس : 00962-6-5331661 - ص. ب (1615 – الجبيهة)
* الأردن – عمـان – وسـط البـلد – مجمـع الفحيص التجــاري- هــاتف: 00962-6-4627627
www.darwael.com
E-Mail: Wael@Darwael.Com

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله الامين وعلى آله وصحبه ومن تبعهم الى يوم الدين.

أما بعــد

فهذا الكتاب في التفاضل والتكامل ليس الاول من نوعه فقد نشر كتب كثيرة في هذا الموضوع ولكن كل كتاب من هذه الكتب يعرض مادة أو مجموعة مواضيع يرى أنها مناسبة لغرض معين، وهذا الكتاب يعرض مادة مبسطة وسلسلة في موضوع التفاضل والتكامل تعرض مادة الفصل الأول لطلاب الكليات العلمية في الجامعات وكليات المجتمع لذا ارتأيت أن أسميه أساسيات التفاضل والتكامل فهو يعرض في وحدته الأولى موضوع الاقترانات ويأتي من ضمنها بعض التعريفات في الاعداد الحقيقية مثل الفترات والمتباينات وخط الاعداد والاقتران وانواعه وبعض انواع الاقترانات الحقيقية والاقترانات المثلثية. أما الوحدة الثانية فهي تعرض بعض الموضوعات في النهايات والاتصال كمفهوم النهايات وقواعد النهايات ونهايات الاقترانات المثلثية والاتصال، والوحدة الثالثة نشرح فيها التفاضل كتعريف المشتقة وقواعد الاشتقاق واشتقاق الاقترانات المثلثية وقانون السلسلة والاشتقاق الضمني، والرابعة تحوي تطبيقات التفاضل مثل المعدلات المرتبطة بالزمن والتزايد والتناقص والقيم القصوى والتقعر ورسم المنحنيات وتطبيقات القيم

القصوى، أما الخامسة والسادسة فهي تتعرض للتكامل وتطبيقات مثل التكامل غير المحدود والتكامل المحدود وقواعد التكامل وتكامل الاقترانات المثلثية وتطبيقات التكامل كالمساحات والحجوم بعده طرق وطول المنحنى البياني.

وأخيراً وليس آخراً أشكر كل من ساهم في إخراج هذا الكتاب واخص بالشكر دار وائل للنشر ممثلة في صاحبها وائل ابو غربية، واتمنى على زملائي المدرسين وابنائي الطلبة أن لا يبخلوا علي بأي ملاحظات أو إقتراحات لأخذها بعين الاعتبار في الطبعات القادمة ان شاء الله.

والله الموفق

فتحى حمدان

المحتويات

الموضوع	الصفحة

الوحدة الثانية
النهايات والاتصال

الوحدة الثالثة
التفــاضل

الموضوع	الصفحة

الوحدة الرابعة

تطبيقات على التفاضل

الوحدة الخامسة

التكـــامل

الموضوع	الصفحة

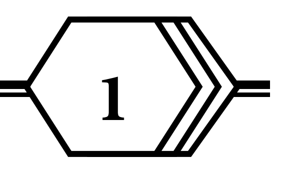
الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل



الاقترانــات

Functions



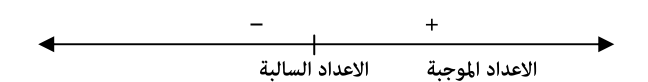
الوحدة الأولى

الاقترانات

Functions

الاعداد الحقيقية: Real Numbers

تعرف مجموعة الاعداد الحقيقية على انها مجموعة الاعداد النسبية وغير النسبية حيث تحوي الاعداد النسبية الاعداد الصحيحة والاعداد الكسرية بينما الاعداد غير النسبية تمثل عادة جذور الاعداد التي ليست مربع كامل مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ .... الخ وايضا من الامثلة عليها $\sin 41^{\circ}$ وتمثل الاعداد الحقيقية بخط الاعداد وهو عبارة عن خط مستقيم منتصفه يمثل الرقم صفر على يمين الصفر الاعداد الموجبة وعلى يساره الاعداد السالبة هكذا



الفترات: Intervals

تعرف الفترات على انها مجموعات جزئية من الاعداد الحقيقية وهناك ثلاثة انواع من الفترات هي: لأي عددين حقيقيين أ،ب فإن:

أ- الفترة المفتوحة Open interval

$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

ب- الفترة نصف المفتوحة أو نصف المغلقة Half closed interval

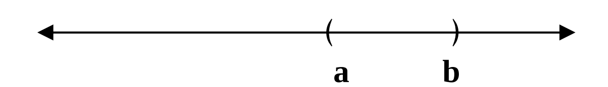
$(a, b] = \{x \in R : a < x \le b\}$

جـ- الفترة المغلقة Closed interval

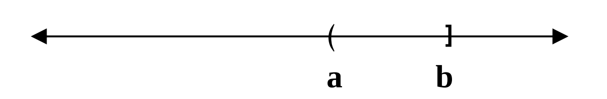
$[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$

وتمثل الفترات على خط الاعداد على أنها جزء منه بالشكل التالي:

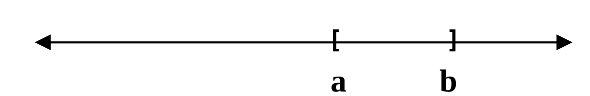
الفترة المفتوحة



الفترة نصف المفتوحة



الفترة المغلقة



المتباينات: Inequalities

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية (<) اقل مـن (>) اكـبر من ، (≥) أقل من أو يساوي (≤) اكبر من أو يساوي ومن الامثلة على المتباينات:

1- $x < 2$

2- $x + 1 \leq -3$

3- $x^2 + 2x + 5 \geq 0$

تسمى قيم x التي تجعل المتباينة صحيحة حلا للمتباينة ومجموعـة قـيم x التـي تحقـق المتباينـة تسـمى مجموعة الحل

مثال:

جد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $3x - 2 > x + 1$

2- $x^2 - 5x \geq -6$

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

4- $\frac{2x-1}{x+1} \leq 0 \quad , \ x \neq -1$

الحل:

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية

1- $3x - 2 > x + 1$

نضيف للطرفين + 2

$3x > x + 3$

نضيف للطرفين $-x$

$3x - x > 3$

$2x > 3$

نقسم الطرفين على 2

$x > \frac{3}{2}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

2- $x^2 - 5x \geq -6$

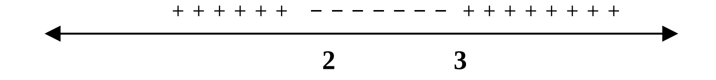
نضيف للطرفين + 6

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

نحلل العبارة التربيعية

$(x-3)(x-2) \geq 0$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين ونفس إشارة x^2 خارج الجذرين



∴ تكون مجموعة الحل هي (∞ ، 3] U [2 ، ∞-)

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \le 0$

نأخذ x عامل مشترك

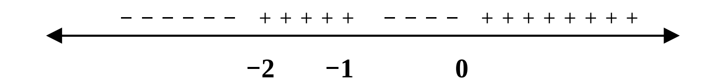
$$x\left(x^2 + 3x \quad + 2\right) \le 0$$

نحلل العبارة التربيعية داخل القوس

$$x(x+2)(x+1) \le 0$$

فتكون جذور الاقتران هي { 2-، 1-، 0}

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

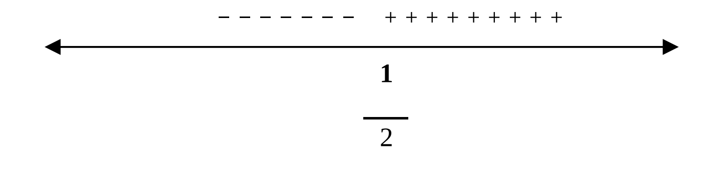


∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي [2-، ∞-) U [0، 1-]

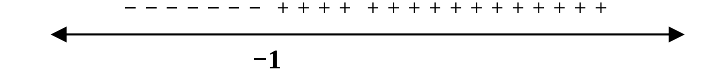
4- $\frac{2x - 1}{x + 1} < 0$

في الاقترانات النسبية نحدد اشارة البسط واشارة المقام على خط الاعداد ثم نقسم الاشارات

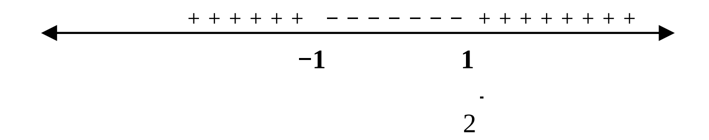
البسط $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$



المقام $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$



القسمة



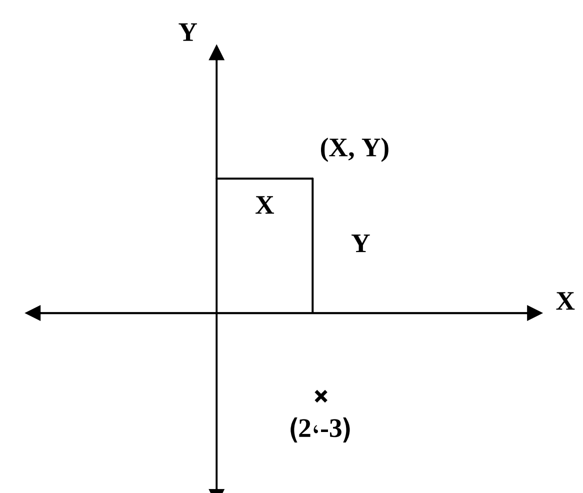
تكون مجموعة الحل للمتباينة هي الفترة المفتوحة $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

المستوى الديكارتي: Cartesian Plane

يعرف المستوى الديكارتي على أنه حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة الاعداد الحقيقية R في مجموعة الاعداد R أي R × R ويمثل بيانياً على شكل محورين افقي ويسمى محور x وعمودي ويسمى محور y

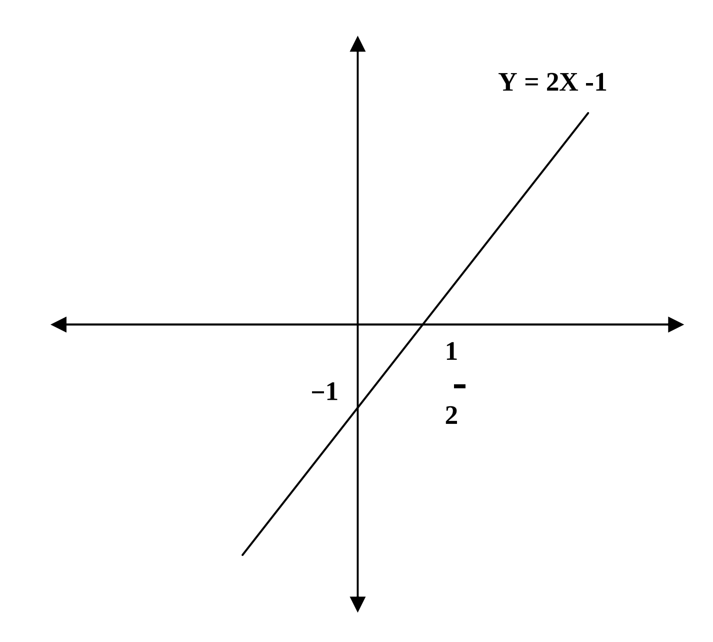
واي نقطة في المستوى تمثل بالزوج المرتب (x،y) حيث تمثل x بعد النقطة عن محور y وy بعد النقطة عن محور x

فمثلا النقطة (2،-3) تبعد من محور y السالب وحدتين وتبعد عن محور x ثلاث وحدات



والخط المستقيم y = ax + b يمثل في المستوى بمجموعة النقاط (x،y) والتي تحقق معادلة الخط.

فمثلاً الخط المستقيم y = 2x - 1 يمثل مجموعة النقاط (x،y) حيث y = 2x – 1 ويكون شكله في المستوى البياني بالشكل التالي:



المسافة بين نقطتين: Distance between tow points

تعرف المسافة d بين النقطتين (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2) بالقاعدة التالية:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مثال:

جد المسافة بين النقطتين (4- , 2)، (1 , 3)

الحل:

نطبق القانون

$$d = \sqrt{(1-2)^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \quad \text{u.d.}$$

مثال:

اذا كانت المسافة بين النقطتين (-4, m) , (0, 2) هي 5 وحدات فجد قيمة m.

الحل:

نطبق قانون المسافة

$$\mathbf{d} = \sqrt{(0-(-4))^2 + (2-m)^2} = 5$$

$$= \sqrt{16 + (2-m)^2} = 5$$

بتربيع الطرفين

$\Rightarrow 16 + (2 - m)^2 = 25$

$\Rightarrow (2 - m)^2 = 9$

$\therefore\ 2 - m = \pm 3$

$\Rightarrow m = -1, 5$

الدائرة: Circle

تعرف الدائرة على انها المحل الهندسي لمجموعة النقاط (x, y) في المستوى البياني والتي تبعد مسافة ثابتة (r) عن نقطة معينة (m) تسمى مركز الدائرة وتكون معادلة الدائرة التي احداثيات مركزها (a , b) هي

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

وبفك الاقواس تكون المعادلة $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

وبتجميع الحدود تكون معادلة الدائرة الأساسية:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad , \ c = a^2 + b^2 - r^2$

مثال:

جد معادلة الدائرة التي مركزها (1 , 0) ونصف قطرها (2)

الحل:

نعوض في الشكل الأساسي للمعادلة

$X^2 + Y^2 - (2)(0)(x) - (2)(1)(y) + C = 0$

حيث $C = (0)^2 + (1)^2 - (2)^2 = -3$

∴ تكون معادلة الدائرة هي:

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

مثال:

جد المركز ونصف القطر للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$

الحل:

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة الأساسية نرى أن

$-2a = 4 \Longrightarrow a = -2$

$-2b = -4 \Longrightarrow b = 2$

∴ مركز الدائرة هو (2, 2-)

ولايجاد نصف القطر نعوض في المعادلة $C = a^2 + b^2 - r^2$

$7 = (-2)^2 + (2)^2 - r^2$

$7 = 4 + 4 - r^2$

$r^2 = 8 - 7 = 1 \Longrightarrow r = 1$

سؤال: لماذا حذفت القيمة السالبة هنا.

مفهوم الاقتران: Function

يعتبر الاقتران من المفاهيم الاساسية في الرياضيات ويعتمد تعريف الاقتران على العلاقات حيث تعتبر العلاقة جزء من حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين أي رابطة تربط بين مجموعتين فمثلاً اذا ربطنا بين مجموعتين الاولى ترمز الى مجموعة من الكتب والثانية الى مجموعة جزئية من الاعداد الطبيعية بحيث تربط كل كتاب مع عدد صفحاته فاننا نطلق على هذه الرابطة اقتران ونرى هنا أن كل كتاب يرتبط بعدد صفحات وحيد فلا يمكن ان يكون للكتاب عددين من الصفحات وكل كتاب له عدد صفحات فلا يمكن أن يكون كتاب بدون عدد صفحات.

تعريف:

الاقتران هو علاقة من المجموعة A الى المجموعة B بحيث كل عنصر في A يرتبط بعنصر واحد فقط من B ويرمز له بالرمز f أي

$$f : A \rightarrow B$$

وتكون عناصر f عبارة عن أزواج مرتبة (x , y) حيث $x \in A$ ، $y \in B$ ، ويرمز للمتغير y بالرمز $f(x)$ ، "صورة المتغير x تحت الاقتران f" واذا كانت $(x , y_1) , (x, y_2) \in f$ فيجب أن يكون $y_1 = y_2$

تسمى المجموعة A مجال الاقتران (Domain) والمجموعة B المجال المقابل (Co Domain) ومجموعة الصور من المجال المقابل تسمى المدى (Rang)، اذا كان $f : A \rightarrow A$ فنقول أن f اقتران على المجموعة A

مثال:

اذا كانت $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{ x \in N : x \leq 10\}$

فأي من العلاقات التالية تمثل اقتران من المجموعة A إلى المجموعة B

1- $f = \{(1, 1), (3 , 1), (5,1) , (7,1), (9,1)\}$

2- $f = \{ (x , y) : y = x^2\}$

3- $f = \{ (x, y) : y = x +1\}$

4- $f = \{ (x, y) : y = x - 2\}$

5- $f = \{ (1 , 1) , (3, 3) , (5 , 5) , (7, 7) , (1 , 2), (9, 10)\}$

الحل:

1- f اقتران حيث كل عنصر في A يرتبط بعنصر واحد فقط في B

2- f ليس اقتران لان ($5 \in A$) لكن $5^2 = 25 \notin B$

$\therefore$ (5) ليس له صورة في B

3- f اقتران حيث كل عنصر في A له صورة واحدة فقط في B

4- ليس اقتران حيث $f(1) = -1 \notin B$

5- ليس اقتران لان العنصر (1) له صورتين في المجموعة B هما (2)، (1)

مثال:

جد مدى كل من الاقترانات التالية:

1- $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2$

2- $f: I \longrightarrow I$, $f(x) = |x|$

3- $f: N^* \longrightarrow R$, $f(x) = x^{-1}$

الحل:

1- المدى = $R^+ \cup \{0\}$

2- المدى = N

3- المدى = $(0, 1]$

مثال :

اذا كان $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ فجد

$f(1), f(-2), f(3)$

الحل:

$$f(1) = \frac{1}{1^2+2} = \frac{1}{3}$$

$$f(-2) = \frac{1}{(-2)^2 + 2} = \frac{1}{6}$$

$$f(3) = \frac{1}{(3)^2 + 2} = \frac{1}{11}$$

أنواع الاقترانات:

1- اقتران واحد لواحد: One-to-one function

يكون الاقتران f من المجموعة A الى المجموعة B واحد لواحد اذا كان $x_1, x_2 \in A$ بحيث $x_1 \neq x_2$ فـــان $f(x_2) \neq (x_1)$ f في B او اذا كانــت $f(x_1) = f(x_2)$ فان $x_1 = x_2$

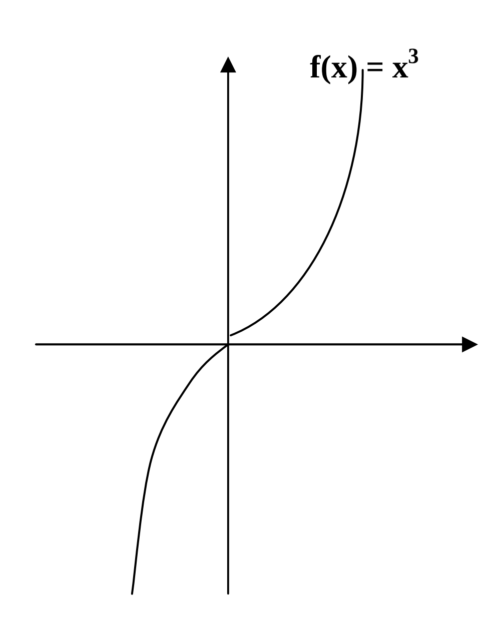
مثال:

أي من الاقترانات التالية والمعرفة على R يمثل اقتران واحد لواحد

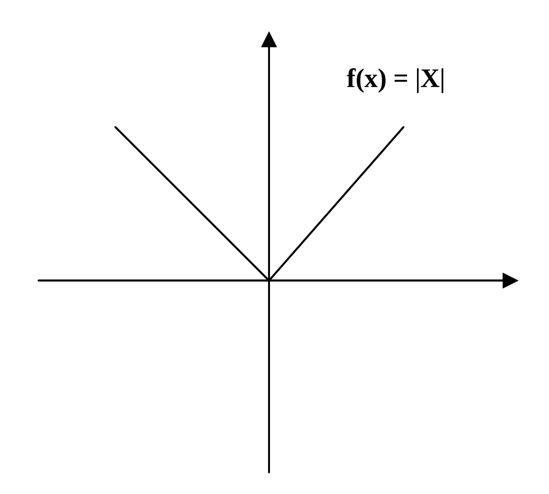
1- $f(x) = 3x - 5$

2- $f(x) = x^2$

3-



4-



الحل:

1- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ الاقتران واحد لواحد

$x_1 = 2, x_2 = -2$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$

$f(x_1) = (2)^2 = 4$

$f(x_2) = (-2)^2 = 4$

$\Rightarrow f(x_1) = f(X_2)$

$\therefore$ f ليس واحد لواحد

3- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow X_1^3 = X_2^3$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f اقتران واحد لواحد

4- $x_1 = 1, x_2 = -1 \Longrightarrow x_1 \neq x_2$

$f(x_1) = |1| = 1$

$f(x_2) = |-1| = 1$

$\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

∴ f ليس واحد لواحد

2- الاقتران الشامل: onto

يكون الاقتران شامل اذا كان المدى = المجال المقابل

مثال:

أي من الاقترانات التالية والمعرفة على R إقتران شامل

1- $f(x) = 4x + 1$
2- $f(x) = x^4 - 4x^2$
3- $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل:

1- f(x) اقتران شامل.

2- ليس شامل وذلك لأن المدى = $R^+ \cup \{0\}$

3- ليس شامل لأن المدى = $R / \{0\}$

3- اقتران التناظر : bijective

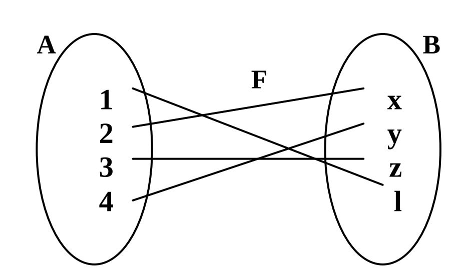
يكون الاقتران تناظر أذا كان شامل وواحد لواحد

مثال:

أي من الاقترانات التالية تناظر

1- $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = ax + b$

2-



3- $f: R \longrightarrow R^{+}$, $f(x) = |x|$

4- $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل:

1- $f(x)$ اقتران خطي لذلك فهو واحد لواحد وشامل

$\therefore$ فهو تناظر

2- نلاحظ من المخطط السهمي للاقتران ان الاقتران واحد لواحد وشامل

$\therefore$ فهو تناظر

3- لاحظنا سابقاً انه ليس واحد لواحد ولكنه شامل.

$\therefore$ فهو ليس تناظر

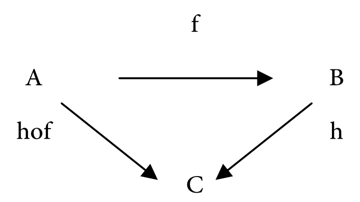
4- $f(x)$: واحد لواحد ولكنه ليس شامل

$\therefore$ فهو ليس تناظر

تركيب الاقترانات: Composition of functions

اذا كان f اقتران معرف من A الى B وكان h اقتران اخر معرف من B الى C فان تركيب الاقترانين h بعد f من A الى C أي

$$f: A \longrightarrow B,\ h: B \longrightarrow C \implies (h \circ f): A \longrightarrow C$$



اذا كانت $x \in A \longrightarrow f(x) \in B \Longrightarrow h(f(x)) \in C.$

$\therefore \; (hof)(x) = h(f(x))$

مثال:

اذا كان $f: R \longrightarrow R \quad h: R \longrightarrow R$

$f(x) = 3X + 7, \; h(x) = X^2 - 1$

جد

1- $(h \circ f)(x)$

2- $(f \circ h)(x)$

الحل:

1- $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(3x + 7)$

$= (3x + 7)^2 - 1$

$= 9X^2 + 42X + 48$

2- $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2 - 1)$

$= 3(x^2 - 1) + 7$

$= 3X^2 + 4$

سؤال: هل $(f \circ h)(x) = (h \circ f)(x)$

مثال :

اذا كانت $h(x) = 2x + \sqrt{X} \quad , \quad f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

فجد

•••••••h o f) (3)

2- (f o h) (4)

الحل:

1- نجد في البداية

$$f(3) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$(h \circ f)(3) = h(f(3)) = h\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2 – $h(4) = (2)(4) + \sqrt{4} = 8 + 2 = 10$

$$\Rightarrow (f \circ h)(4) = f(h(4)) = f(10) = \frac{1}{10+1} = \frac{1}{11}$$

الاقتران المعكوس: Inverse function

اذا كان $f : A \to B$ إقتران واحد لواحد وكان $h : B \to A$ اقتران واحد لواحد بحيث اذا كانت x
$\in A$ فان $f(x) \in B \Leftarrow h(f(x)) = x$

فان h يكون الاقتران المعكوس للاقتران f ويرمز له بالرمز f^{1}

$$\therefore f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{1}(x))$$

مثال:

اذا كان $f: R \to R$ بحيث $f(x) = \frac{x-3}{2}$ فجد

1- $f^{-1}(x)$

2- $f^{-1}(-1)$

الحل:

1- $f(f^{-1}(x)) = x$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(x)-3}{2} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)-3 = 2x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x+3$$

2- $f^{-1}(-1) = 2(-1) + 3 = 1$

مثال:

اذا كان $f: R^+ \longrightarrow R^+$ $f(x) = x^2 - 2$ ، فجد $f^{-1}(x)$

الحل:

نرى هنا أن f معرف على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة وهذا يجعله إقتران واحد لواحد

$\therefore \quad f(f^{-1}(x)) = x$

$\Rightarrow (f^{-1}(x))^2 - 2 = x$

$\Rightarrow (f^{-1}(x))^2 = x + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \pm \sqrt{x+2}$

ولكننا نستثنى القيمة السالبة كون الاقتران معرف على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة وبالتالي فإن:

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$

الاقترانات الحقيقية وتمثيلها بيانياً Real functions

الاقتران الحقيقي هـو الاقـتران المعـرف مـن مجموعـة الاعـداد الحقيقيـة الى مجموعـة الاعـداد الحقيقية. أي $f : R \rightarrow R$

إقتران كثير الحدود: Polynomial functions

الاقتران على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots. + a_1 x + a$$

يسمى اقتران كثير حدود حيث : n عدد طبيعي

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثير الحدود

والمقدار $a_r x^r$ يسمى حد من حدود كثير الحدود.

وتكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران

مثال:

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية:

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x - 4$

3- $f(x) = x^2 - x+1$

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

الحل:

1- الدرجة الصفرية ويسمى أيضاً اقتران ثابت.

2- الدرجة الاولى ويسمى ايضا اقتران خطي.

3- الدرجة الثانية أو إقتران تربيعي.

4- الدرجة السابعة.

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود:

1- الجمع والطرح:

يتم جمع (طرح) كثيري حدود بجمع معاملات المتغيرات المتشابه الأسس

مثال: جد ناتج ما يلي:

1- $(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3)$

2- $(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7)$

الحل:

1- $(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 9$

2- $(6x^5+3x^3-4x+5) - (3x^5+x^4-2x^2-4x+7) = 3x^5-x^4+3x^3+2x^2-2$

2- الضرب:

يتم ضرب كثيري حدود $f(x)$، $h(x)$ بضرب كل حد من حدود $f(x)$ بكافة حدود $h(x)$.

مثال:

اذا كان $f(x) = 3x^2 - 5x+4$، وكان $h(x) = (x^2+2x-1)$ فجد $(f.h)(x)$

الحل:

$$(f.h)(x) = (3x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 1)$$

$$= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10x^2 + 5x + 4x^2 + 8x - 4$$

$$= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4$$

3- القسمة:

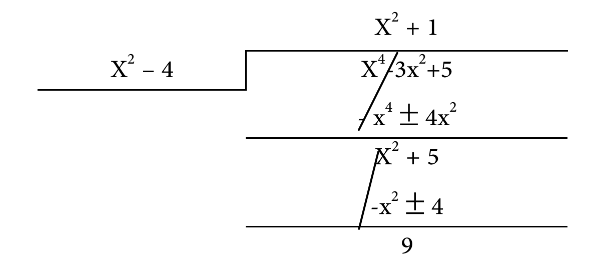
يتم قسمة كثيري حدود اما باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة أو باستخدام نظرية الباقي

مثال:

$h(x) = x^2 - 4 \qquad f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

$f(x) \div h(x)$ باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة

الحل:



يكون ناتج القسمة $x^2 + 1$

وباقي القسمة 9

مثال:

اذا كان $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 6$, $h(x) = x+2$

فجد ناتج القسمة باستخدام نظرية الباقي

الحل:

عند قسمة $f(x)$ على $h(x) = x-a$ فان باقي القسمة يكون $f(a)$ وعليه فان باقي قسـمة $f(x)$ عـلى $h(x)$ هو $f(-2)$.

$f(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^3 + 2(-2) - 6$

$= 16 + 24 - 4 - 6 = 30$

ويكون $f(x) = k(x)\, h(x) + 30$ حيث $k(x)$ ناتج القسمة

درجة $k(x)$ = درجة $f(x)$ − درجة $h(x)$

$3 = 1 - 4 = k(x)$

∴ $k(x)$ سيكون اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة

$$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ولايجاد $k(x)$ نجد قيم a, b, c, d من العلاقة

$$f(x) = k(x) \cdot h(x) + 30$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 6 = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot (x + 2) + 30$$
$$= ax^4 + (b + 2a)\, x^3 + (c + 2b)\, x^2 + (d + 2c)\, x + (2d+30)$$

ومن تساوي الاقترانات يكون

$a = 1$

$b + 2a = -3$

$\Longrightarrow b + (2)(1) = -3$

$b = -5$

$c + 2b = 0 \Longrightarrow c = 10$

$d + 2c = 2$

$\Longrightarrow d + 20 = 2$

$\Longrightarrow d = -18$

ناتج قسمة $f(x)$ على $h(x)$ وهو $k(x)$ حيث

$$k(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 18$$

وباقي القسمة = 30

تمثيل كثيرات الحدود بيانياً:

يتم تمثل كثيرات الحدود بيانياً باخذ قيم للمتغير x وايجاد ما يقابلها مـن قـيم $y = f(x)$ واخـذ نقاط تقاطع الاقتران مع محور x ومحور y ان أمكن ذلك.

مثال :

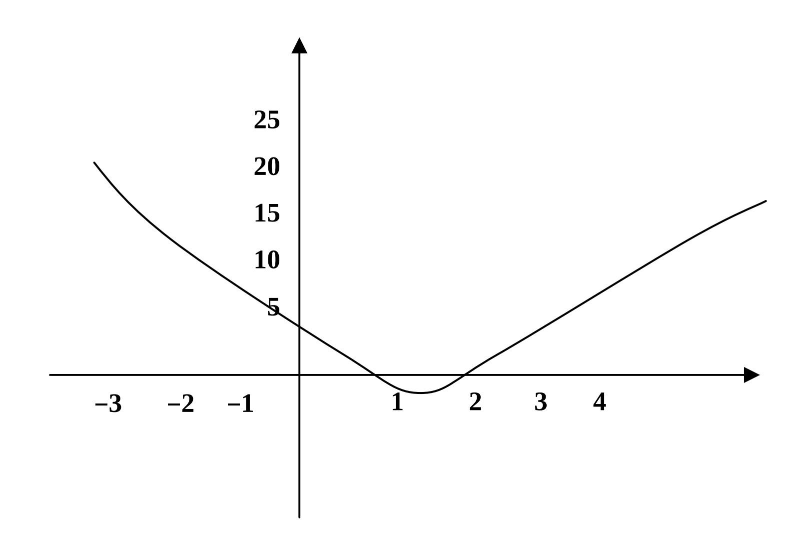
مثل الاقتران $f(x) = x^2 - 3x + 2$ بيانياً

الحل:

نأخذ قيم لـ x ونجد منها y كما في الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	20	12	6	2	0	0	2	6

نلاحظ من الجدول أن الاقتران يقطع محور الصادات عند النقطة (0، 2) وبالتالي يكون رسم الاقتران هو



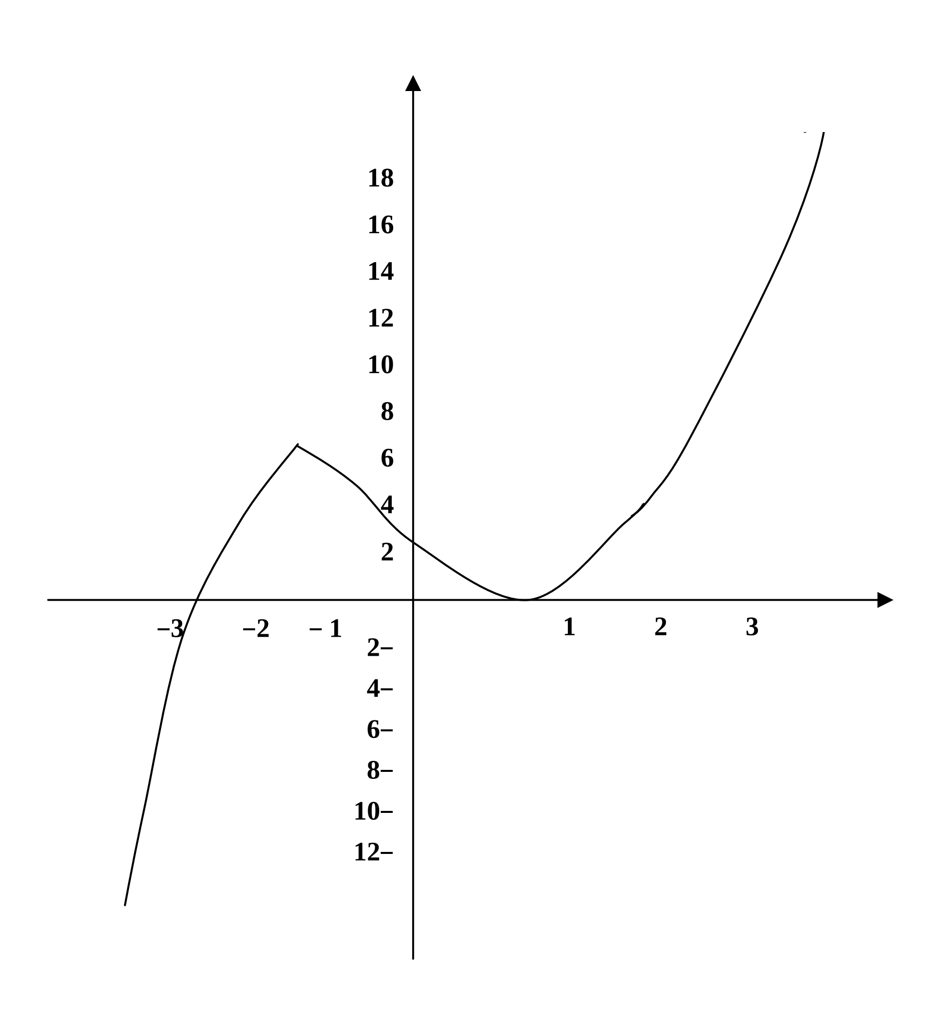
مثال :

مثل الاقتران $f(x) = x^3 - 4x + 3$ بيانياً

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-12	3	6	3	0	3	18

يقطع محور y عند النقطة (0،3) ويقطع محور x عند النقطة (1،0) وفي الفترة (-3، -2)



الاقتران النسبي:

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيري حدود على شكل بسط ومقام.

على الصورة

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$, $h(x)$, $g(x)$ كثيري حدود

مثال:

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية:

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

2- $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

3- $f(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$

الحل:

1- يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هـذا الاقـتران لا يوجـد عـدد حقيقي يجعل المقام صفر، ∴ مجال الإقتران = R

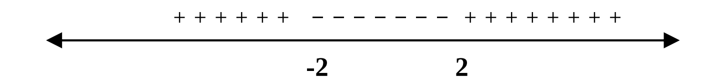
2- نساوي المقام بالصفر فيكون $x - 1 = 0 \Leftarrow x = 1$

∴ المجال $R / \{1\}$

3- يكون الاقتران معرف عندما يكون $x^2 - 4 > 0$

ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $x^2 - 4 = 0$ ونبحث في اشارة الاقتران

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$



∴ يكون الاقتران موجب على $R / [-2, 2]$

وهذا هو مجال الاقتران النسبي

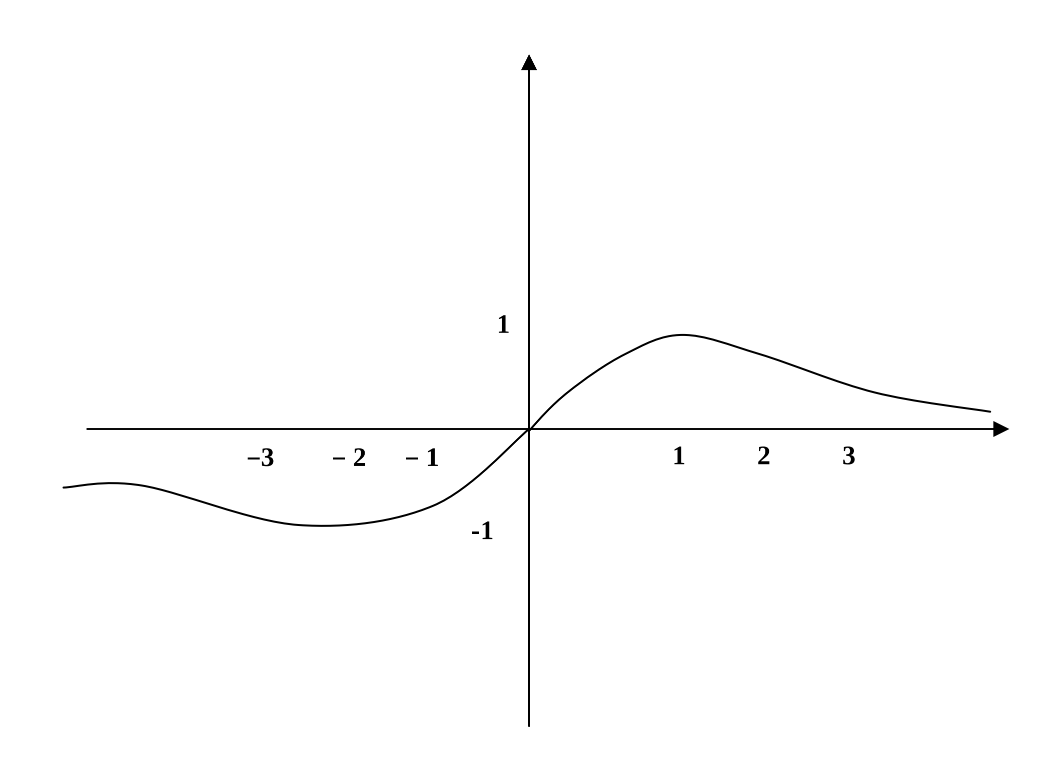
مثال:

ارسم منحنى كل من الاقترانات في المثال السابق:

الحل:

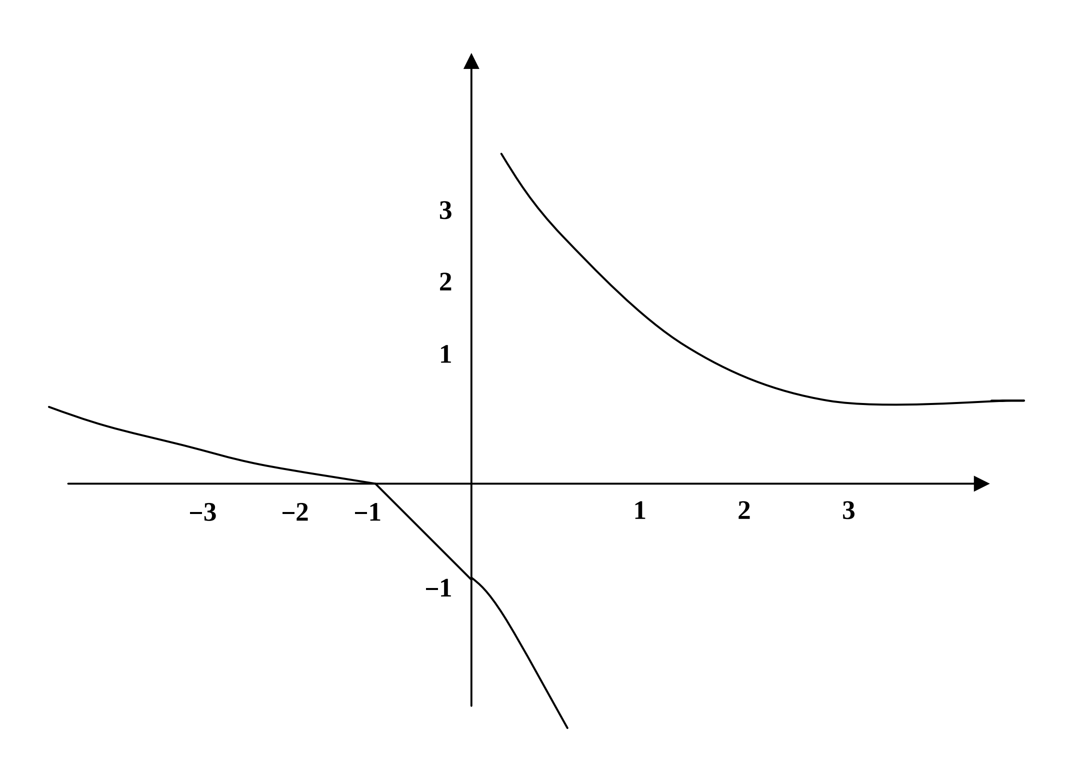
1- $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f(x)	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$	1	0	-1	$\frac{-8}{10}$	$\frac{-6}{10}$



2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	∞	3	2



3- تمرين للطالب

إقتران القيمة المطلقة: Absolute value function

اقتران القيمة المطلقة هو اقتران مجاله الاعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة مع الصفر ، أي

$f : R \rightarrow R+ \cup \{0\}$

مثال:

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

1- $f(x) = |x|$

2- $f(x) = |x^2|$

3- $f(x) = x + |x-2|$

4- $f(x) = \frac{|x|}{x}$

الحل:

1- نعيد تعريف الاقتران بحيث نضرب x في اشارة سالب اذا كانت سالبة وذلك لتتحول الى موجب واذا كانت موجبة تبقى كما هي:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

2- $f(x) = |x^2| = x^2$ نحذف اشارة القيمة المطلقة وذلك لان الاقتران التربيعي دائما موجب

3- $$f(x) = x + |x-2| = \begin{cases} x + x - 2 & x \geq 2 \\ x - x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

4- $$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

مثال: جد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $|x + 2| = 3$

2- $|2x - 6| \leq 4$

3- $|3x - 1| > 5$

الحل:

1- $|x + 2| = 3$

$\Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$

أو $x + 2 = -3 \Rightarrow x = -5$

$\therefore$ مجموعة الحل هي: {1، -5}

2- $|2x - 6| \leq 4$

$\Rightarrow -4 \leq 2x - 6 \leq 4$

$+6 \quad +6 \quad +6$

$\Rightarrow 2 \leq 2x \leq 10$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 5$

$\therefore$ مجموعة الحل هي [1 ، 5]

3- $|3x - 1| > 5$

$\Rightarrow 3x - 1 > 5 \Rightarrow 3x > 6$

$\Rightarrow x > 2$

أو $3x - 1 < -5 \Rightarrow 3x < -4$

$\Rightarrow x < \frac{-4}{3}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $(2, \infty) \cup \left(-\infty, \frac{-4}{3}\right)$

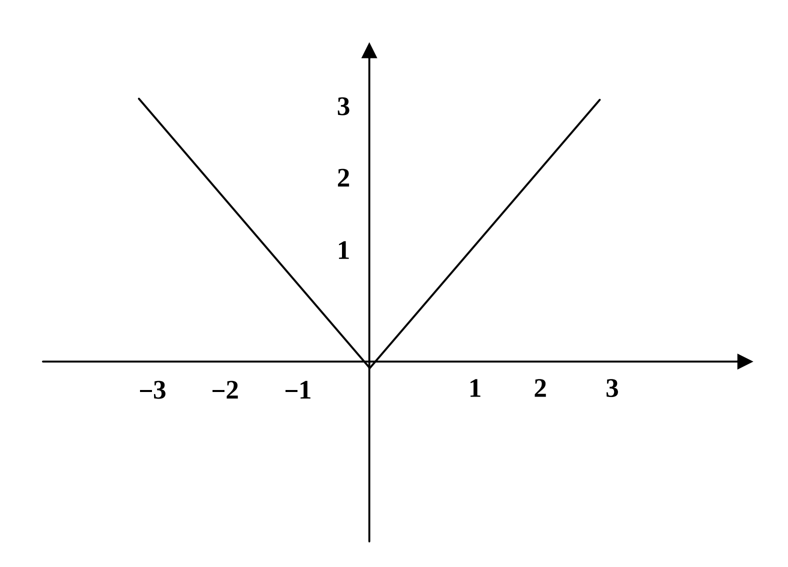
مثال:

أرسم منحنيات الاقترانات التالية :

الحل:

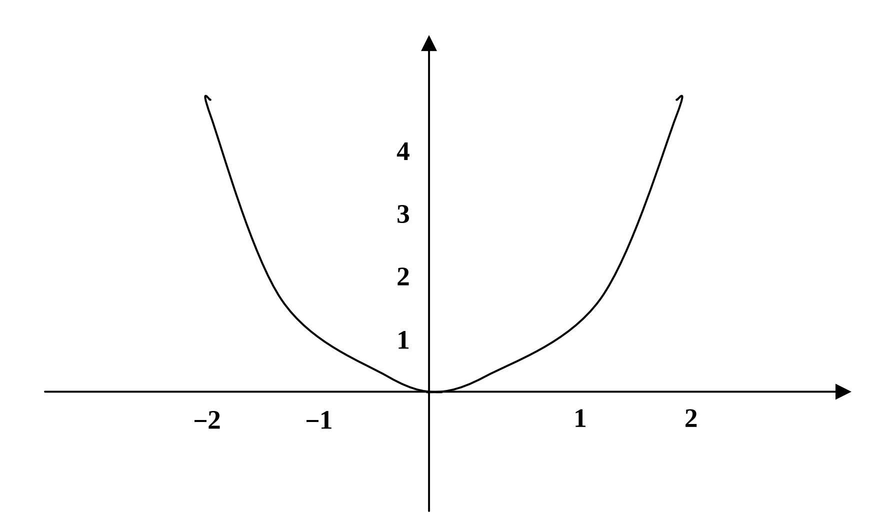
1- $f(x) = |x|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	2	1	0	1	2	3



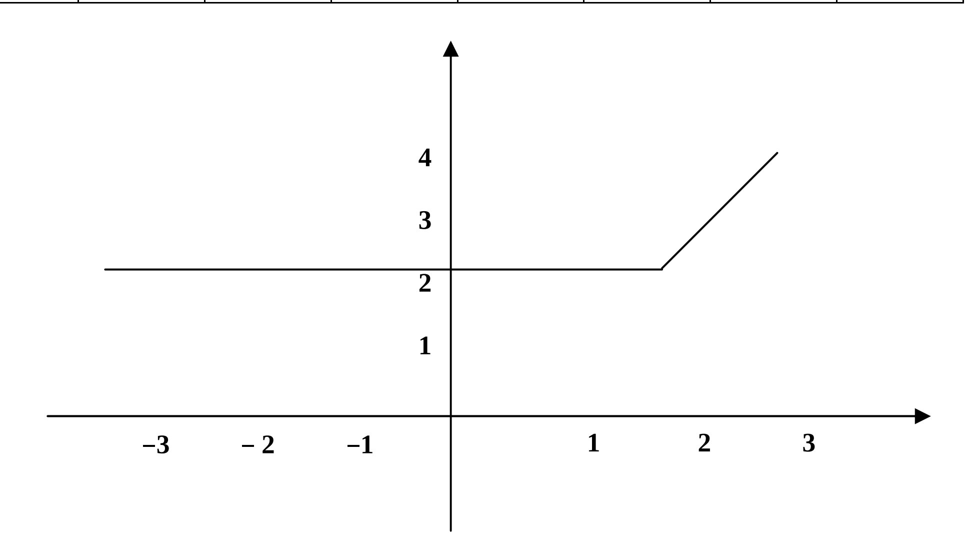
2- $f(x) = |x^2| = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4



3- $f(x) = x + |x - 2|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	2	2	2	2	2	4



4- تمرين للطالب

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

اقتران صحيح x : Integer (x) function

اقتران صحيح x هو اقتران معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة الاعداد الصحيحة

أي $f : R \rightarrow I$

مثال:

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

1- $f(x) = [\,x\,]$

2- $f(x) = [1-2x]\ ,\ (-2\ ,\ 2]$

3- $f(x) = 2x + [0.5x + 2\,]$

4- $f(x) = \left|x\right| + [x]\ ,\ [-3\ ,\ 3]$

الحل:

1- تكون قيمة f (x) عدد صحيحاً ثابتاً في كل فترة من الفترات فمثلاً تكون قيمة x في الفترة (1، 0] الحد الادنى للفترة وهو صفر وتسمى الفترة (1 , 0] فترة جزئية من مدى الاقتران

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & ,\ -1 \le x < 0 \\ 0 & ,\ 0 \le x < 1 \\ 1 & ,\ 1 \le x < 2 \\ 2 & ,\ 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

2- طول الفترة الجزئية = $\dfrac{1}{|\text{معامل } x|} = \dfrac{1}{|-2|} = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & -2 < x \le -1.5 \\ 3 & -1.5 < x \le -1 \\ 2 & -1 < x \le -0.5 \\ 1 & -0.5 < x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le 0.5 \\ -1 & 0.5 < x \le 1.5 \\ -2 & 1 < x \le 1.5 \\ -3 & 1.5 < x \le 2 \end{cases}$$

3- $f(x) = x + [0.5x + 2]$

نعيد تعريف $[0.5x + 2]$ ثم نضيف لها x

طول الفترة الجزئية $= \dfrac{1}{0.5} = 2$

$$[0.5x+2] = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 0 & -4 \le x < -2 \\ 1 & -2 \le x < 0 \\ 2 & 0 \le x < 2 \\ 3 & 2 \le x < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x & -4 \le x < -2 \\ x+1 & -2 \le x < 0 \\ x+2 & 0 \le x < 2 \\ x+3 & 2 \le x < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

4- $f(x) = |x| + [x] \quad , \quad [-3, 3]$

نعيد تعريف كل اقتران على ثم نجمعها مع بعضها

$$|x| = \begin{cases} -x & -3 \le x < 0 \\ x & 0 < x \le 3 \end{cases}$$

$$[x] = \begin{cases} -3 & -3 \le x < -2 \\ -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

نجمع الاقترانين مع بعضهما فيكون

$$F(x) = |x| + [x] = \begin{cases} -x - 3 & -3 \le x < -2 \\ -x - 2 & -2 \le x < -1 \\ -x - 1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x + 1 & 1 \le x < 2 \\ x + 2 & 2 \le x < 3 \\ x + 3 & x = 3 \end{cases}$$

مثال:

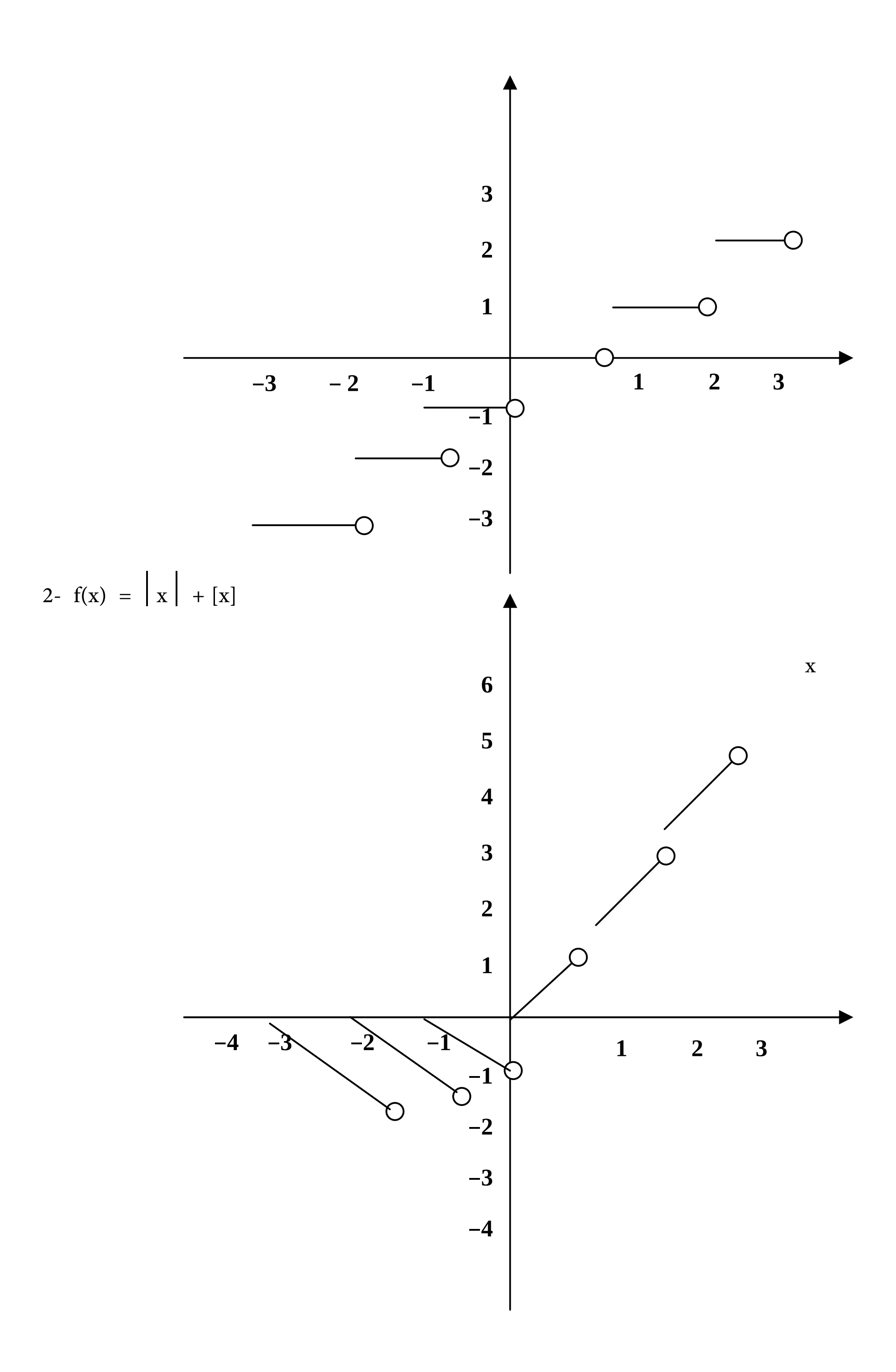
ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية:

1- $f(x) = [x]$

2- $f(x) = |x| + [x] \quad , \quad [-3, 3]$

الحل:

1- من قاعدة الاقتران نرى أن الاقتران يكون بالشكل التالي:


3
2
1
−3
− 2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
2- f(x) = |x| + [x]
x
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
−4

الاقتران الأسي : Exponential function

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الاعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة أي

$f: R \rightarrow R^{+}$

حيث $f(x) = a^{x}$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الاساس ، x: الاس

ومن الامثلة على الاقترانات الاسية

$f(x) = 10^{x}$ $f(x) = e^{x}$ $f(x) = 2^{x}$

اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي $f(x) = e^{x}$

واذا كان الاساس = 10 فان الاقتران يسمى الاس العشري $f(x) = 10^{x}$

قوانين الاسس:

1- $a^{x} . a^{y} = a^{x+y}$

2- $\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$

3- $(a^{x})^{y} = a^{xy}$

4- $a^{x} . b^{x} = (ab)^{x}$

5- $a^{0} = 1$

6- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^{x}}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$

مثال:

بسط المقادير التالية إلى أبسط صورة

1- $$\frac{\left(2^3\right)\sqrt[3]{4^7}}{\left(2^2\right)\sqrt[3]{4}}$$

2- $$\frac{2\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}\right)\left(3^4\right)}{9\left(\sqrt{6}\right)\left(4^2\right)}$$

3- $$\frac{\left(e\right)\left(\sqrt{e}\right)\left(e^{2x}\right)}{\left(e^x\right)\left(e^x\right)^{-3}\left(e\right)^{\frac{3}{2}}}$$

الحل:

1- $$\frac{2^2\sqrt[3]{4^7}}{2^2\sqrt[3]{4}} = \frac{\left(2^3\right)\left(4^{\frac{7}{3}}\right)}{\left(2^2\right)\left(4^{\frac{1}{3}}\right)} = 2^{3-2}\cdot 4^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$= 2^1\cdot 4^{\frac{6}{3}} = 2.4^2 = \left(2\right)\left(16\right) = 32$$

2- $$\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot 3^4}{9\cdot\sqrt{6}\cdot 4^2} = \frac{2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}}\cdot 3^4}{9\cdot 6^{\frac{1}{2}}\cdot 4^2} = \frac{2.3^{\frac{1}{2}}\cdot .\left(4.2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3^4}{\left(3.3\right)\left(2.3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 4^2}$$

$$= \frac{2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 3^4}{3^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^2} = \frac{2.2\cdot 3^4}{3^2\cdot 2^4} = 2^{2-4}\cdot 3^{4-2} = 2^{-2}\cdot 3^2 = \frac{9}{4}$$

$$3-\quad \frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}e^{\frac{3}{2}}} = \frac{e \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}}{e^{x}e^{-3x}e^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}} \cdot e^{2x}}{e^{-2x} \cdot e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{2x+2x} = e^{4x}$$

مثال:

أرسم منحنى كل من الاقترانات التالية:

1- $f(x) = 3^x$

2- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

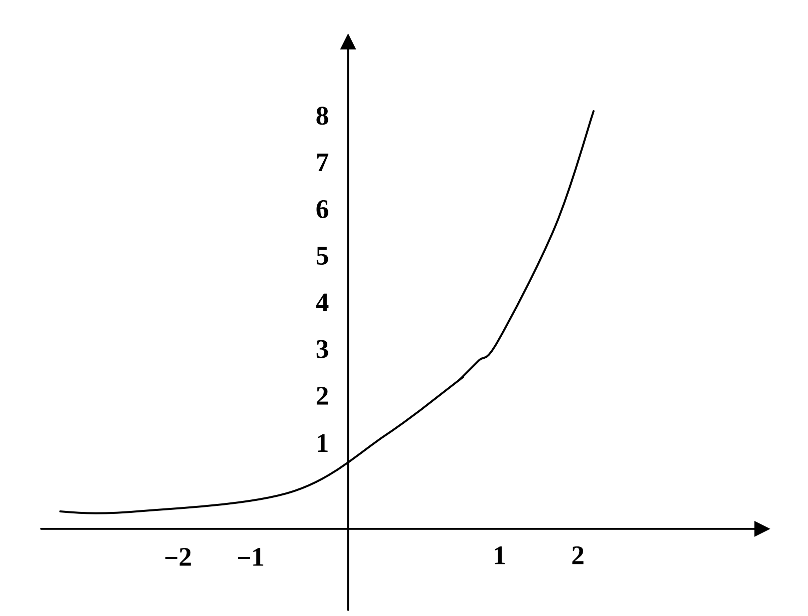
3- $f(x) = e^x$

4- $f(x) = 10^{x^2-4}$

الحل:

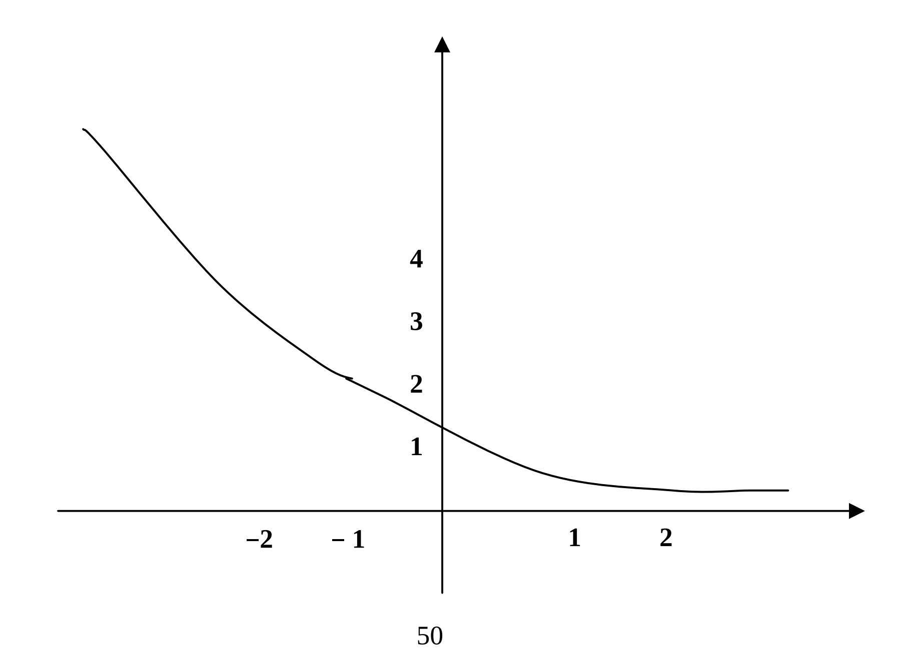
1- $f(x) = 3^x$

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



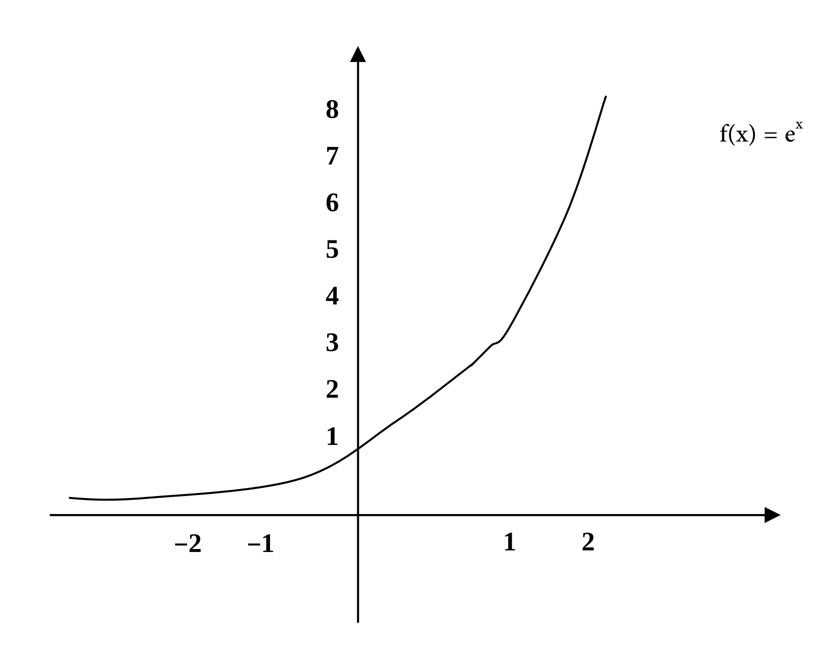
2- f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



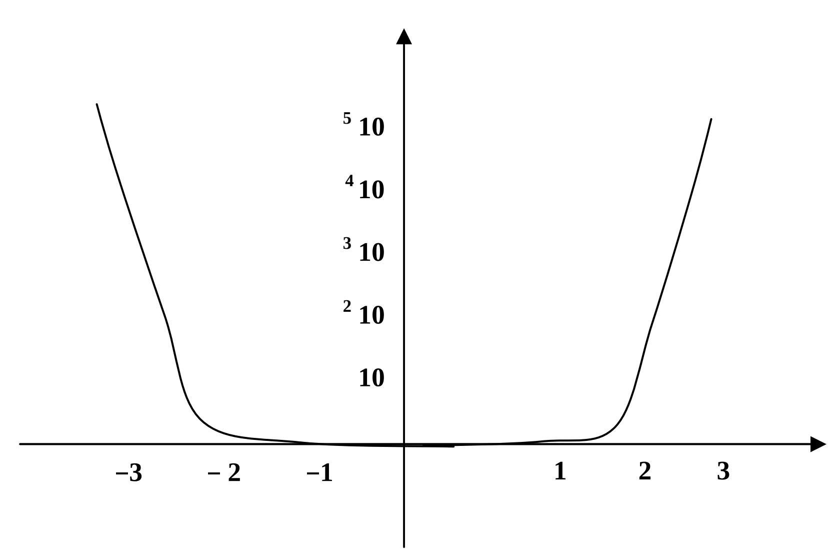
3- $f(x) = e^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2



4- $f(x) = (10)^{x^2-4}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10^5	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	1	10^5



الاقتران اللوغاريتمي: Logarithmic function

الاقتران اللوغاريتمي هو الاقتران المعكوس للاقتران الاسي وبالتالي يكون الاقتران اللوغاريتمي معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة الى مجموعة الاعداد الحقيقية

أي $f : R^{+} \rightarrow R$

بحيث $f(x) = \log_a x \ , \ a \in R^{+}$

اذا كانت $x = \log_a y \Rightarrow y = a^x$

مثال:

جد الاقتران المعكوس للاقترانات التالية:

1- $f(x) = 2^x$

2- $f(x) = e^x$

3- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4- $f(x) = 10^x$

الحل:

1- $f^{-1}(x) = \log_2 x$

2- $f^{-1}(x) = \log_e x$

وهذا يسمى اللوغاريتم الطبيعي ويكتب على الصورة Lnx

3- $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4- $f^{-1}(x) = \log_{10}x = \log x$

وهذا يسمى اللوغاريتم العشري.

لايجاد الوغاريتمات والاسس الطبيعية والعشرية تستخدم جداول اللوغاريتمات، أو الآلة الحاسبة.

قوانين اللوغاريتمات:

1- $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

2- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3- $\log_a x^y = y \log_a x$

4- $\log_a a = 1$

5- $\log_a 1 = 0$

6- $\log_a a^x = a^{\log_{ax}} = x$

7- $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$

مثال:

بسط ما يلي الى ابسط صورة

1- $\dfrac{\log 10 + \log 100 + \log 1000}{\log 1000}$

2- $\dfrac{\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9}{\log_2 4}$

الحل:

1- $$\frac{\log 10+\log 100+\log 1000}{\log 1000}=\frac{1+\log 10^{2}+\log 10^{3}}{\log 10^{3}}$$

$$=\frac{1+2+3}{3}=\frac{6}{3}=2$$

2- $$\frac{\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9}{\log 4}=\frac{\log_2 3\cdot 6-\log_2 9}{\log_2 2^{2}}$$

$$=\frac{\log_2 \frac{18}{9}}{2\log_2 2}=\frac{\log_2 2}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال:

ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية:

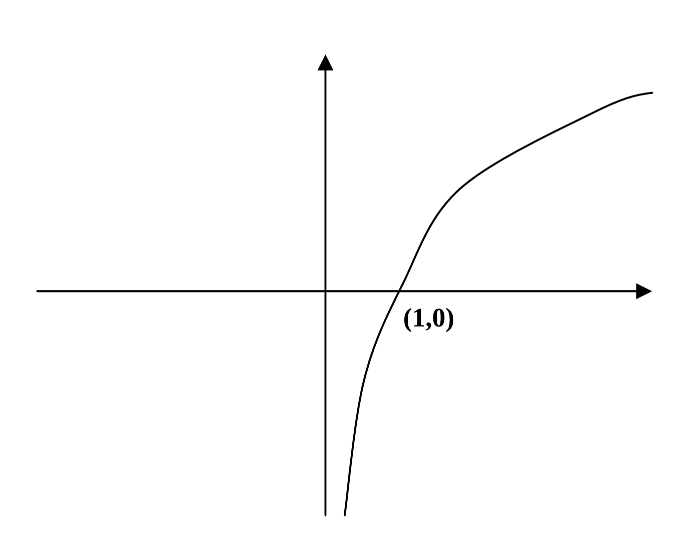
1- $f(x) = \log_2 x$

2- $f(x) = \log x^2$

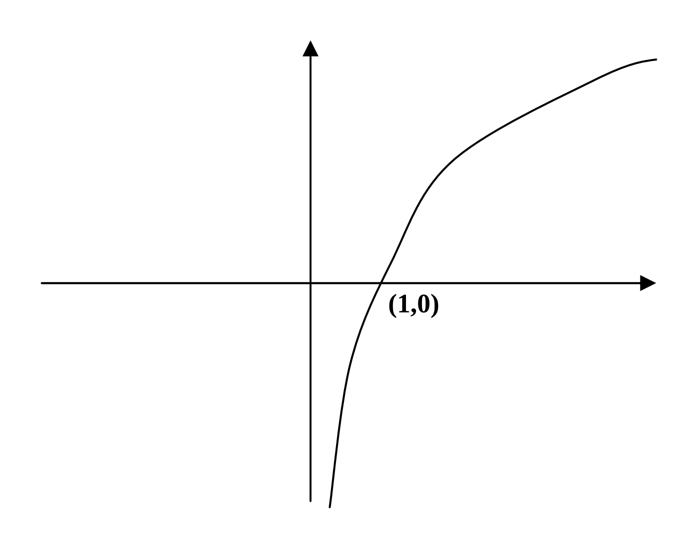
الحل:

1- $f(x) = \log_2 x$

بما أن الاقتران اللوغاريتمي هو معكوس الاقتران الأسي سيكون منحناه معكوس لمنحنى الاقتران الأسي

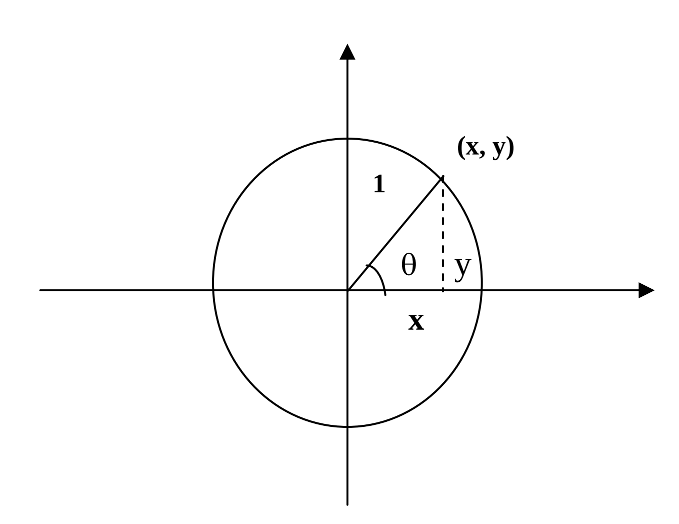


2- $f(x) = \log x^2 = 2\log x$



الاقترانات المثلثية (الدائرية) Trigonometric function

تعرف الاقترانات الدائرية عن طريق دائرة الوحدة فلو أخذنا أي نقطة على دائرة الوحدة (x, y) وأخذنا الزاوية θ ، كما في الشكل التالي:



فان الاقترانات المثلثية للزاوية θ تعرف بالشكل:

1- $\sin\theta = y$ (جيب الزاوية θ)

2- $\cos\theta = x$ (جيب تمام الزاوية θ)

3- $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ظل الزاوية θ)

4- $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$ (ظل تمام الزاوية θ)

5- $\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$ (قاطع الزاوية θ)

6- $\csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$ (قاطع تمام الزاوية θ)

والاقتران المثلثي اقتران معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية إلى مجموعة الاعداد الحقيقية أي $f : R \to R$ وفي حالة اقتراني الجيب وجيب التمام يكون مدى الاقتران هو الفترة [1، 1-].

من قانون المسافة بين نقطتين نقطة الاصل (0،0) والنقطة (x , y) نلاحظ أن

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

وهذه المتطابقة صحيحة لأي زاوية θ

المتطابقات المثلثية:

1- $\sin - x = -\sin x$

$\cos - x = \cos x$

2- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x$

$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

3- $\tan (x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

4- $\cos (x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos (x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

5- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

6- $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$

$\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$

$\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

$= \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

7- $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

8- $\sin x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2} (x - y) \sin \frac{1}{2} (x + y)$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{1}{2} (x - y)$

$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{1}{2} (x + y) \cos \frac{1}{2} (x - y)$

$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{1}{2} (x - y)$

9- $\tan^2 x + 1 = sce^2 x$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

هناك بعض الزوايا الرئيسية المعروفة والجدول التالي يبين قيمة sin, cos, tan, cot لكل من هذه الزوايا اما باقي الزوايا فتأخذ من جداول خاصة تسمى جداول الجيوب.

cot	tan	cos	sin	الزاوية
∞	0	1	0	0
$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	30
1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	45
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60
0	∞	0	1	90
-∞	0	-1	0	180
0	-∞	0	-1	270
∞	0	1	0	360

مثال:

جد كل مما يلي دون استخدام جداول الجيوب

1- cos 75 2- tan 285 3- sin 195

الحل:

1- $\cos 75 = \cos(45 + 30) = \cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

2- $\tan 285 = \tan(240+45) = \dfrac{\tan 240 + \tan 45}{1 - \tan 240 \tan 45}$

$$= \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \tan 45}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-(1)\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

3- $\sin 195 = \sin(150+45) = \sin 150 \cos 45 + \sin 45 \cos 150$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

مثال:

اثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

1- $1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

2- $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

3- $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2 \dfrac{x+y}{2}$

الحل:

1- $1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$1-2\sin^2 x = 1-2(1-\cos^2 x)$

$= 1-2+2\cos^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

المتطابقة صحيحة

2- $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

بتوحيد المقامات

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \sec x \ \csc x$$

3- $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \cos^2 \frac{x + y}{2}$

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 =$$

$$(2\cos \frac{1}{2} (x + y) \cos \frac{1}{2} (x - y))^2 + (2\cos \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{1}{2} (x - y))^2$$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2} (x + y) \cos^2 \frac{1}{2} (x - y) + 4 \cos^2 \frac{1}{2} (x + y) \sin^2 \frac{1}{2} (x-y)$$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2} (x + y) [\cos^2 \frac{1}{2} (x-y) + \sin^2 \frac{1}{2} (x - y)]$$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2} (x + y)$$

مثال:

جد قيمة x التي تحقق كل من المعادلات التالية:

1- $2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

2- $\cos x \cot^2 x = \cos x$

الحل:

1- $2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos^3 x + \cos^2 x) - (2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos^2 x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow (2\cos x + 1)\,(\cos^2 x - 1) = 0$

$\Rightarrow 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$

أو $\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$

$\Rightarrow x = 0, \pi$

$\therefore$ مجموعة الحل للمعادلة هي

$$\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$$

2- $\cos x \cot^2 x = \cos x$

$\Rightarrow \cot^2 x = \dfrac{\cos x}{\cos x} = 1$

$\Rightarrow \cot x = \pm 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4},\ x = \dfrac{3\pi}{4},\ x = \dfrac{5\pi}{4},\ x = \dfrac{7\pi}{4}$

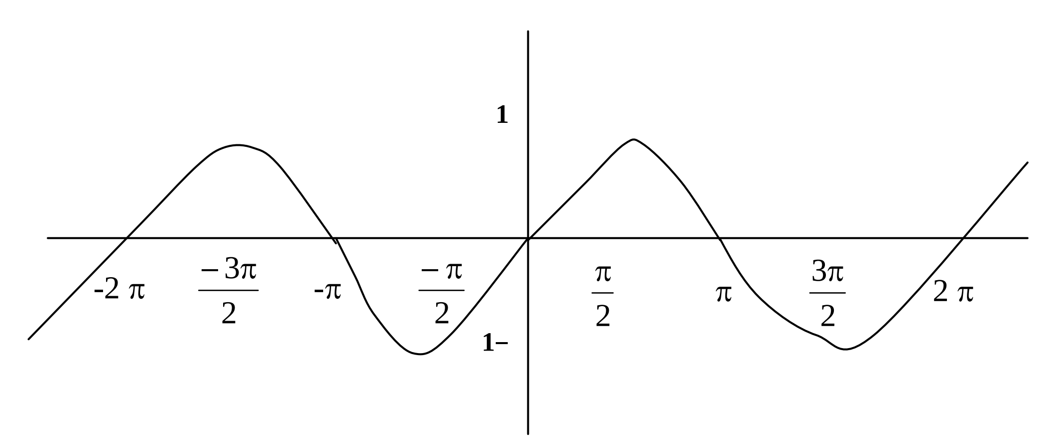
$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\}$

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً:

الاقترانات المثلثية هي اقترانات دورية بمعنى انها تكرر نفسها كل فترة ودوره تغير الاقترانات المثلثية هي π 2، وسنرسم منحنيات الاقترانات المثلثية لنرى كيف تكون فترة تكرار الاقتران.

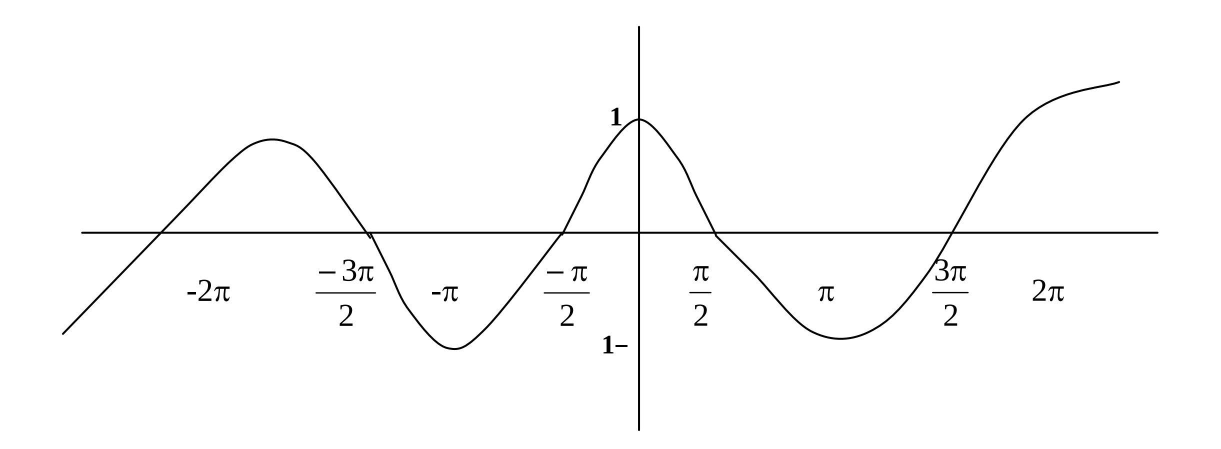
1- اقتران الجيب:

f(x) = sin x

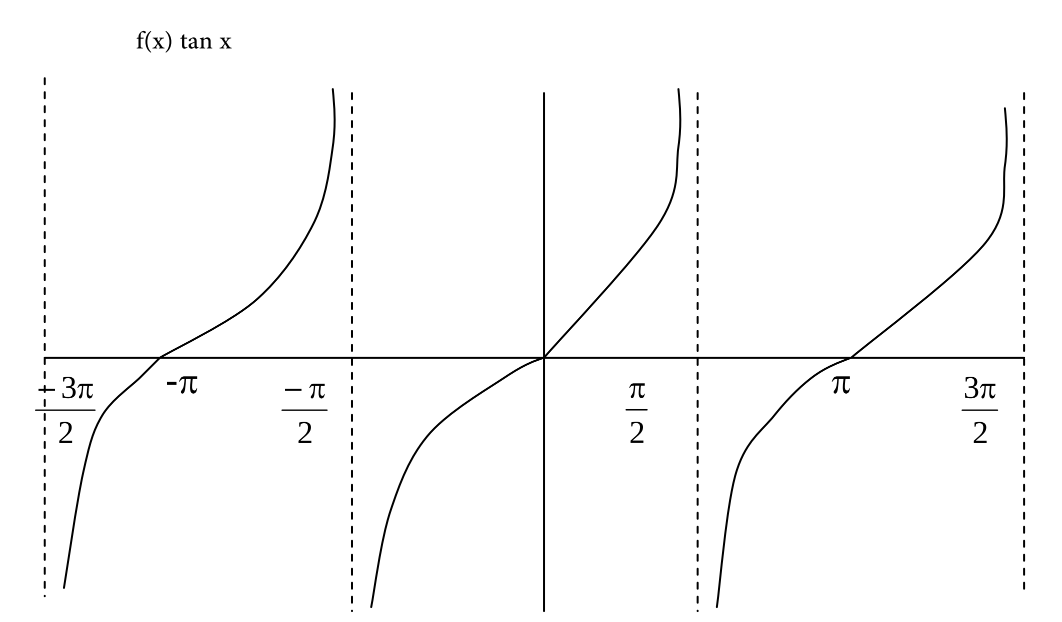


2- اقتران جيب التمام:

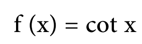
f(x) = cos x

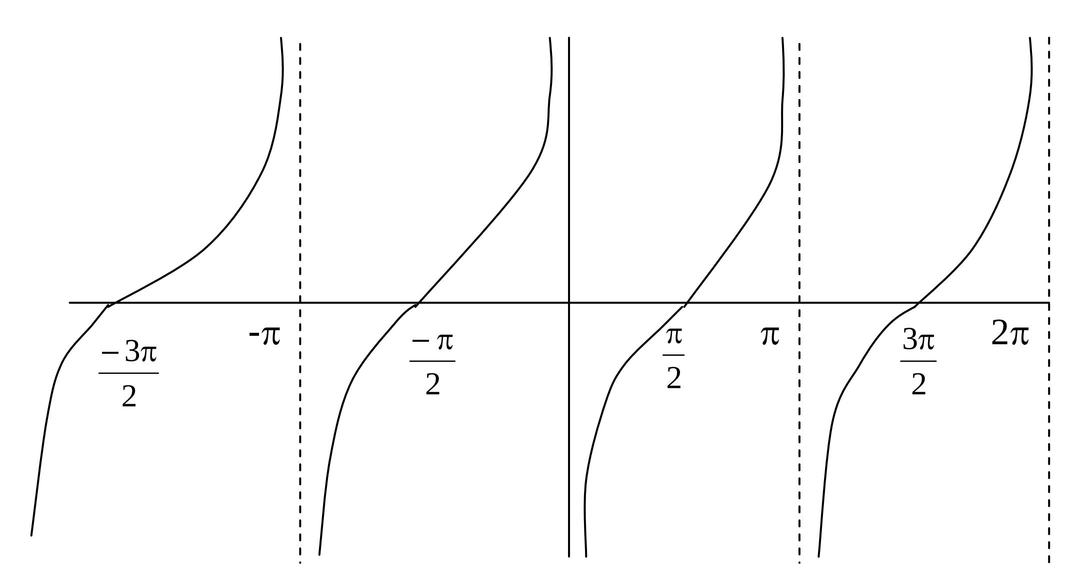


3- اقتران الظل:

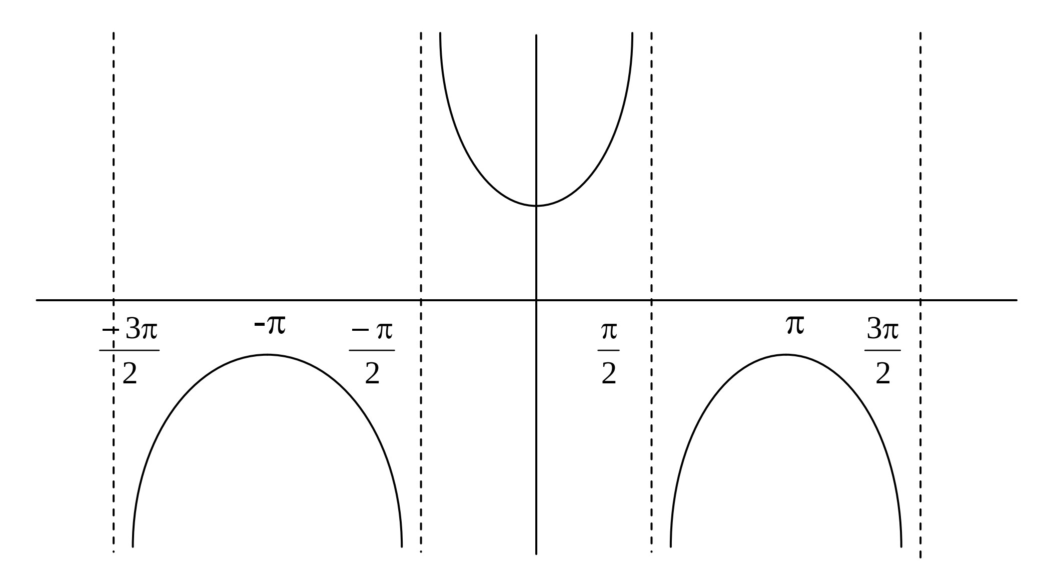


4- اقتران ظل التمام :

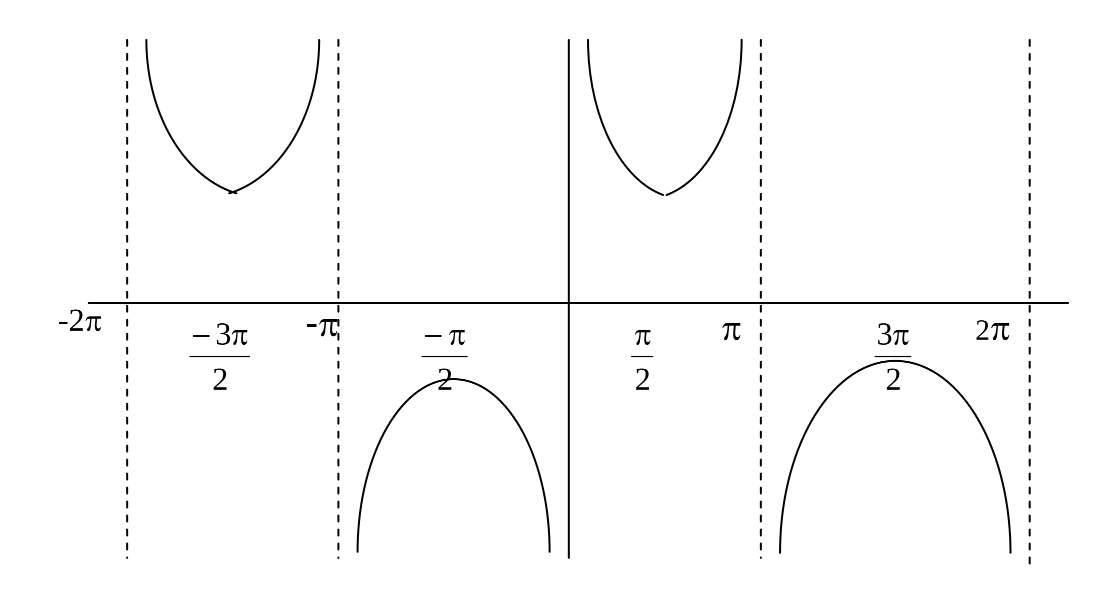




5- اقتران القاطع:



6- اقتران القاطع تمام:



الاقتران المتشعب:

هو الاقتران الذي يكون له أكثر من صورة على فترات متقطعة من المجال المقابل أي على كل فترة يكون للاقتران قاعدة مختلفة عن قاعدة الاقتران في الفترة الاخرى.

ومن الامثلة على الاقترانات المتشعبة اقتران القيمة المطلقة واقتران صحيح x

مثال:

اذا كان f اقتران معرف على مجموعة الاعداد الحقيقية بحيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 7 & x = 1 \end{cases}$$

فجد:

1- ومجال مدى الاقتران f

2- جد f(-3) , f(0), f(1)

3- أرسم منحنى f

الحل:

1- مجال f معرف على جميع الاعداد الحقيقية وايضا مداه = مجموعة الاعداد الحقيقية

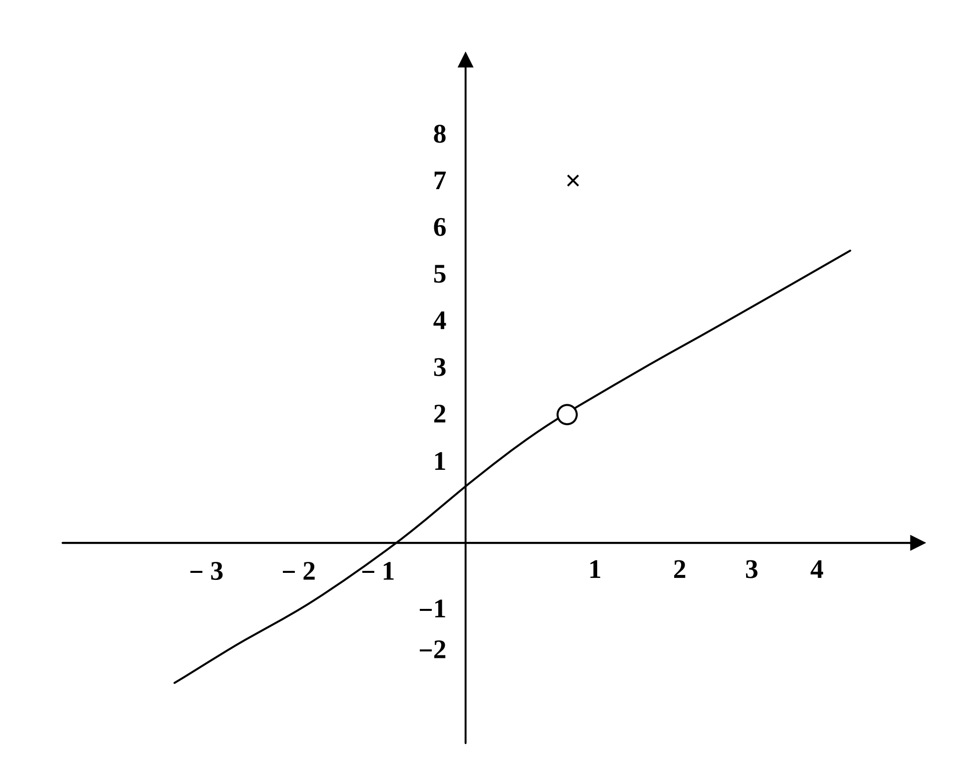
2- $f(1) = 7$

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - 1}{-3-1} = \frac{9-1}{-4} = -2$$

3- لرسم منحنى f ناخذ قيم لـ x ونجد منها f(x)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-2	-1	0	1	7	3	4	5



تمـــــارين

1- جد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

a) $x + 5 \leq 2x - 9$

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$

c) $2x^3 - 7x^2 + 5x > 0$

d) $|x - 2| < 1$

e) $|2x + 3| > 0$

f) $\frac{x^2 - 3x - 4}{|4x - 2|} \geq 0$

2- جد المسافة بين كل من النقطتين:

a) (-2, 2) , (0 , 4)

b) (1, 5) , $(\frac{-1}{2}, 3)$

c) (-3 , 2) , (0, 1)

3- جد معادلة الدائرة التي مركزها ونصف قطرها معطى

a) (0, 0) , r = 3

b) (2 , 0), r = 1

c) (-4, 6) , r = x

4- جد مركز ونصف قطر الدائرة لكل من المعادلات التالية:

a) $x^2 + y^2 - 5x - 9 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

5- جد $f(0.2)$ $f(-1)$, $f(0)$ لكل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = e^{x^2} + |x|$

c) $f(x) = \log(3x + \frac{7}{x})$

d) $f(x) = [x] + |x| + x^{-2}$

e) $f(x) = 10^{[x]}$

6- جد مجال ومدى كل من الاقترانات الحقيقية التالية:

a) $f(x) = x-3$

b) $f(x) = [x]$

c) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

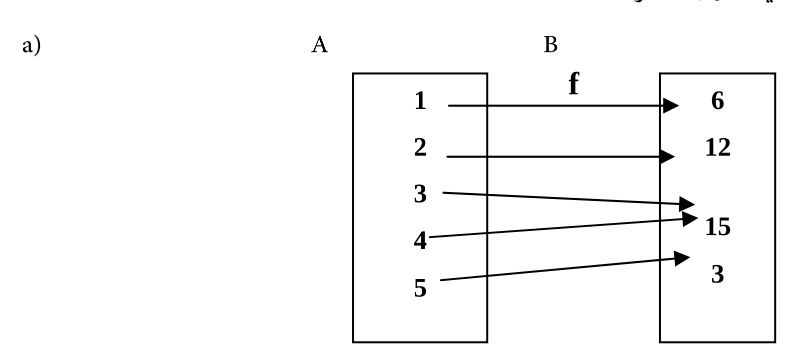
d) $f(x) = |2x-5| + \frac{7}{x}$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \sin x & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$

7- يبين فيما اذا كانت الاقترانات في السؤال السابق واحد لواحد، شامل

8- أي من الاقترانات التالية اقتران تناظر:

a)



b) $f : R^{+} \longrightarrow R^{+}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-4|}{5x-3} & x \geq 4 \\[2ex] \dfrac{1}{x^2 - 1} & x < 4 \end{cases}$$

9- إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} \tan \dfrac{|x|}{x-1} & , \ x \geq \pi \\[2ex] \text{Cos } x & , \ x < \pi \end{cases}$$

$h(x) = x^2 + 1 - e^{2x}$

فجد

a) $(f \circ h)(x)$

b) $(h \circ f)(x)$

c) $(f \circ h)(\pi)$

d) $(h \circ f)\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

10- أوجد الاقتران المعكوس إن وجد لكل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = x^3 - x + 5$

c) $f(x) = x^2 - 3$

d) $f: I \rightarrow I,\ f(x) = [3x - 5]$

11- اذا كان $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ وكان $h(x) = \sqrt[3]{x}$ فجد:

a) $(f \circ h)^{-1}(x)$

b) $(h \circ f)^{-1}(x)$

c) $(f^{-1} \circ h^{-1})(x)$

d) $(h^{-1} \circ f^{-1})(x)$

12- بسط المقادير التالية الى ابسط صور

a) $\frac{(\sqrt{32})(3)^2(\sqrt{6})}{(3)^{\frac{3}{2}}(3)(6)}$

b) $\frac{(2^x)(8^x)}{(4^x)(16)^x}$

13- جد ناتج ما يلي:

a) $(2x^3 - 3x^2 + 4)(x^2 - 1)$

b) $(x^5 - 6x^3 + x) \div (4x - 2)$

14- اثبت أن الاقتران المعكوس للاقتران f (x) اقتران وحيد

15- ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية

a) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

c) $f(x) = |x-3| + 1$

d) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right], \; x \in [-1, 1]$

e) $f(x) = x\cos^2 x, \; x \in [0, 2\pi]$

f) $f(x) = \tan x + \sec x, \; x \in [0, 2\pi]$

16- اثبت صحة المتطابقات التالية:

a) $1-2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

b) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\csc x = \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x$

c) $\dfrac{\tan\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2}}{\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}} = \sec x$

17- أوجد قيم x التي تحقق كلاً من المعادلات التالية:

a) $\sin^2 x - 2\cos^2 x = \dfrac{-1}{2}$

b) $\sin x - \sin^2 x = 0$

c) $1\text{-}2 \sin x \cos^2 x = 0$

d) $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

18- اثبت أن $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ لأي اقتران تناظر f

19- دون استخدام جداول الاقترانات المثلثية جد ما يلي:

a) $\sin \dfrac{9\pi}{2}$

b) $\cos \dfrac{-5\pi}{4}$

c) $\tan 330^\circ$

d) $\cot 405^\circ$

e) $\sec -150^\circ$

f) $\csc 240^\circ$

20- اذا كان $f(x) = 2x - 5$

$h(x) = \dfrac{3x-2}{4}$

فجد k(x) بحيث $(h \circ k)(x) = f(x)$

21- اذا كان $f(x) = 7x + 4$ ، $h(x) = x^2 - 5$ ، $k(x) = \frac{9x-6}{2}$

فجد

a) $(f \circ h \circ k)(x)$

b) $(k \circ h \circ f)(x)$

22- ارسم منحنى الاقترانات التالية:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & X < -3 \\ |x| & -3 \leq x < 4 \\ e^{2x} - 3 & 4 \leq x < 7 \\ [2x - 5] & 7 \leq x < 10 \\ 4 & x \geq 10 \end{cases}$

b) $f(x) = x + \log x$

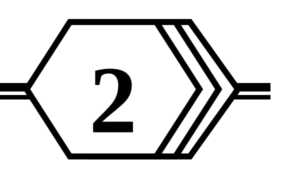
c) $f(x) = \sin x + \cos 2x$

d) $f(x) = e^x + \tan^2 x$



النهايات والاتصال

Limits and Contenuity



الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

Limits and Contenuity

مفهوم النهاية: Limit

النهايات هي أساس حساب التفاضل والتكامل وهي تعبر عن سلوك منحنى اقتران ما $f(x)$ عندما يقترب المتغير x من قيمة معينة ولتوضيح ذلك نأخذ الاقتران التالي

$$f(x) = 2x + 1$$

ونرى ما هو سلوك الاقتران كلما اقتربت x من صفر من خلال الجدول التالي:

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.8	0.98	0.998	1.002	1.02	1.2

نـــــرى أن الاقــــتران $f(x)$ يقــــترب مــــن العــــدد (1) كلــــما اقتربــــت x مــــن صــــفر وبالرموز نكتبها كالاتي:

$$x \to 0 \qquad f(x) \to 1$$

ونقول أن نهاية $f(x) = 1$ عندما x تقترب من صفر وتكتب بالرموز

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

في هذا الاقتران نجد أن $f(0) = 1$ ولكن ذلك ليس بالضرورة فقد يكون الاقتران غير معرف عند النقطة ولكن نهايته عندها موجودة

مثال:

إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ فجد

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

الحل:

هذا الاقتران غير معرف عند x = 2 ولكننا سنرى أن نهايته موجودة عند x = 2

لإيجاد النهاية نطبق إحدى الطريقتين التاليتين:

1- طريقة الجدول:

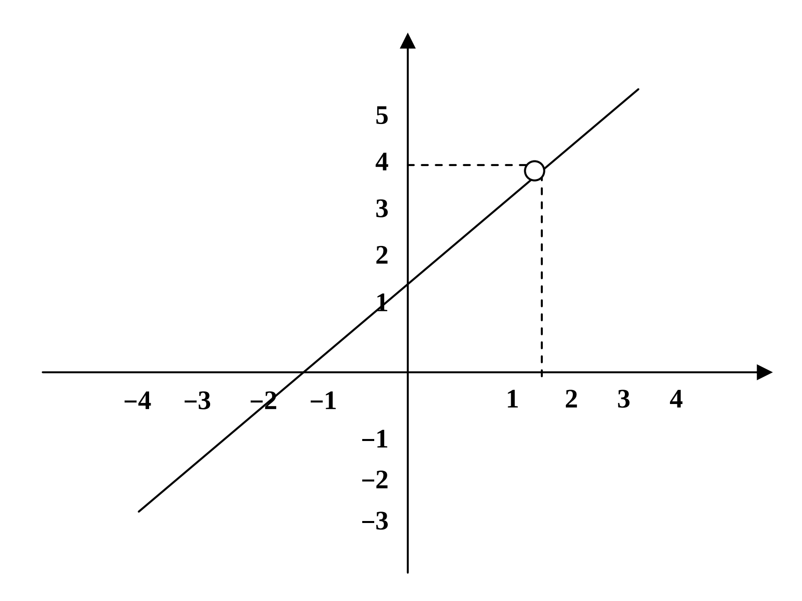
x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1

نرى أن f(x) يقترب من (4) كلما x اقتربت من (2)

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

2- طريقة الرسم البياني:

نرسم الاقتران ومن خلال الرسم نجد النهاية



مـــن خـــلال الرســـم نـــرى أن الاقـــتران يقـــترب مـــن (4) ولا يســـاويه عنـــدما x تقـــترب من (2)

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

تعريف:

اذا كـــان f معـــرف عـــلى الفـــترة المفتوحـــة I وكانـــت $a \in I$ (لـــيس بالضرورة أن يكون معرف عند (a) وكانت L أي عدد حقيقي فان :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

اذا كان لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث أن اذا كان $|x - a| < \delta$ فان

$|f(x) - L| < \in$

مثال:

باستخدام التعريف أثبت أن

$$\lim_{x\to 1} 3x - 1 = 2$$

الحل

$f(x) = 3x - 1 \qquad a = 1 \qquad L = 2$

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن يكون لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-2| < \in$$

ولايجاد ذلك يجب ايجاد قيمة لـ δ تعتمد على $\in$ ونأخذ المتباينة

$|3x-1-2| < \in$

$\Rightarrow |3x-3| < \in$

$\Rightarrow |3(x-1)| < \in$

$\Rightarrow 3|x-1| < \in$ بالقسمة على 3

$$\Rightarrow |x-1| < \frac{\in}{3}$$

$\therefore$ يوجد $\delta = \frac{\in}{3}$ بحيث $|x-1| < \delta$

$$\therefore \lim_{x\to 1} (3x-1) = 2$$

مثال:

أثبت باستخدام التعريف أن

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة

الحل:

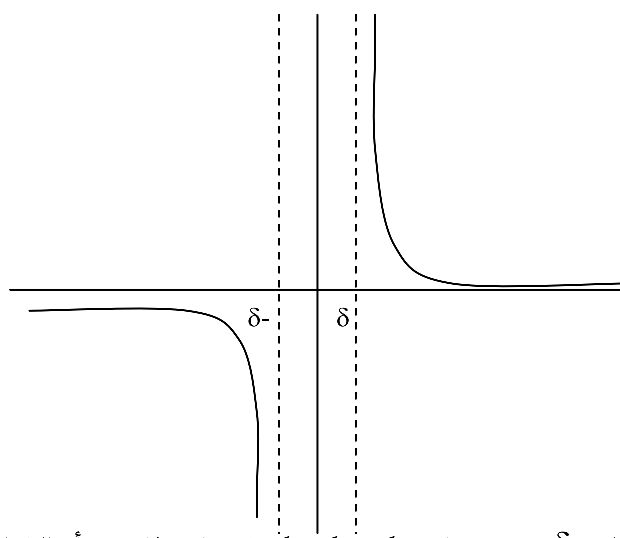
نستخدم البرهان غير المباشر ونفرض أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = L$$

لنأخذ الفترة $(-\delta ، \delta)$ ولتكن $x \in (-\delta ، \delta)$

بحيث تكون $L \in (-\in ، \in)$

من خلال الرسم أدناه للاقتران $\frac{1}{x}$



نلاحظ أنه كلما كانت δ صغيرة جدا $\in$ تكبر وتكون كبيرة جدا وهذا يعني أن الاقتران f (x) يؤول الى المالا نهاية وبالتالي لا يمكن ايجاد δ بحيث يكون التعريف صحيحاً فليس صحيحا أن

$$(\forall \in > 0, \exists \delta > 0 : |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

$\therefore$ فرضنا خاطيء والنهاية غير موجودة

نظريات في النهايات:

نظرية (1)

اذا كانت $a, k \in R$ فان:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

مثال:

$$\lim_{x \to 8} 5 = 5$$

نظرية (2)

اذا كانت $a, b, m \in R$ فان

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

مثال:

جد $\lim_{x \to -1} 5x - 4$

الحل:

$$\lim_{x \to -1} 5x - 4 = (5)(-1) - 4 = -5 - 4 = -9$$

نظرية (3)

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ، وكانت $\lim_{x \to a} h(x) = m$ فإن

1- $\lim_{x \to a} [\, f(x) + h(x) \,] = L + m$

2- $\lim_{x \to a} [\, f(x) \,.\, h(x) \,] = L \,.\, m$

3- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{L}{m} \quad , \quad m \neq 0$

مثال: جد

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{2x + 2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-1}{2x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to a}3x-1}{\lim\limits_{x\to1}2x+2}=\frac{(3)(1)-1}{(2)(1)+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال:

جد $\lim_{x\to a} x^2$

الحل:

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \,.\, x = \lim_{x\to a} x \,.\, \lim_{x\to a} x = a \,.\, a = a^2$$

نتيجة (1)

لأي عدد طبيعي n فإن $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

نتيجة (2)

لأي عدد طبيعي n فإن $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

مثال:

جد $\lim_{x\to1} (x^3 - 4)^5$

الحل:

$$\lim_{x\to1} (x^3 - 4)^5 = [\lim_{x\to1} (x^3 - 4)]^5$$

$$= [1^3 - 4]^5$$

$$= (-3)^5$$

$$= -243$$

نتيجة (3)

$$\lim_{x\to a} [k\, f(x)] = k \lim_{x\to a} f(x) \quad , \quad k \in R$$

نتيجة (4)

$$\lim_{x\to a} [f(x) - h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} h(x)$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} (5x^2 - 6)^3$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2} (5x^2 - 6)^3 = [\lim_{x\to 2} (5x^2 - 6)]^3$$

$$= [5(2)^2 - 6]^3$$

$$= [\ 20 - 6\ ]^3$$

$$= 2744$$

نظرية (4)

اذا كان f كثير حدود فإن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ ,\ \forall\ a \in R$$

مثال:

جد $\lim_{x\to 2} (x^4 - 3x^2 + 5x - 7)$

الحل:

$$\lim_{x\to 2} (x^4 - 3x^2 + 5x - 7) = (2)^4 - 3(2)^2 + (5)(2) - 7$$

$$= 16 - 12 + 10 - 7$$

$$= 7$$

نظرية (5)

اذا كان k(x) اقتران نسبي فان

$$\lim_{x\to a} k(x) = k(a)$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to -1} \frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to -1} \frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 3} = \frac{(5)(-1)^2 - 3(-1) + 4}{-1 - 3}$$

$$= \frac{5 + 3 + 4}{-4}$$

$$= \frac{12}{-4} = -3$$

نظرية (6)

اذا كانت $a > 0$ فإن

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x^3}}$$

الحل:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}}{4-\sqrt{x^3}}=\frac{\lim_{x\to a}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}}{\lim_{x\to a}4-\sqrt{x3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(1)^2}-3\sqrt{1}}{4-\sqrt{(1)3}}$$

$$=\frac{1-3}{4-1}=\frac{-2}{3}$$

نظرية (7)

اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x^2-3x+1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2-3x+1)}$$

$$=\sqrt{3^2-(3)(3)+1}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

حساب النهايات:

في بعض الاقترانات النسبية تكون نتيجة التعويض كمية غير معرفة مثل

$$\frac{0}{0} \text{ ، } \infty \cdot 0 \text{ ، } \infty - \infty \text{ ، } \frac{\infty}{\infty}$$

ولكن اذا رسمنا الاقتران نجد أن هناك نهاية للاقتران موجودة، وفي هذه الحالة نلجأ الى تحليل الاقتران.

مثال:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر يكون الناتج $\frac{0}{0}$ $\therefore$ نلجأ للتحليل

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

مثال:

جد

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 27}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 27} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^3-27} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2+3x+9}$$

$$= \frac{1}{3^2+(3)(3)+9}$$

$$= \frac{1}{27}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} x-2 = 3-2 = 1$$

مثال:

$$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\times\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}$$ (الضرب بالمرافق)

$$= \lim_{x\to 25}\frac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{x-25}$$

$$= \lim_{x\to 25}\sqrt{x}+5$$

$$= \sqrt{25}+5$$

$$= 10$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)$$

الحل:

بالتعويض المباشر تكون النتيجة (∞ . 0) كمية غير معرفة وهنا أيضا نلجأ للتحليل.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{x\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} \times \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$$ بالضرب بالمرافق

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(x+1)}{x\left(\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{-1}{\left(\sqrt{0+1}\right)\left(1+\sqrt{0+1}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+9} - \frac{1}{9}}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+9} - \frac{1}{9}}{x} = \frac{0}{0}$$

بتوحيد المقامات في البسط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9-(x+9)}{9(x+9)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9-x-9}{(x)(9)(x+9)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(x)(9)(x+9)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{9(x+9)}$$

$$= \frac{-1}{9(0+9)}$$

$$= \frac{-1}{81}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+5}{x-2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر ينتج

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+5}{x-2}$$

$$= \frac{4-8+5}{2-2}$$

$$= \frac{1}{0} = \infty$$ (غير موجودة)

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{X-7}$$

الحل:

بالتعويض المباشر ينتج أن

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7} = \frac{0}{0}$$

نلجأ للتحليل وفي هذه الحالة نستخدم طريقة تسمى الاستبدال وهي:

نفرض: $x = y^3 - 1 \Leftarrow y^3 = x+1 \Leftarrow y = \sqrt[3]{x+1}$

وأيضا $x \to 7 \Rightarrow y \to 2$

$$\therefore \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7} = \lim_{y \to 2} \frac{y-2}{y^3-1-7} = \lim_{y \to 2} \frac{y-2}{y^3-8}$$

$$= \lim_{y \to 2} \frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)}$$

$$= \lim_{y \to 2} \frac{1}{y^2+2y+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+x+2}{x+1}$$

الحل:

عند التعويض المباشر تكون النهاية

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+x+2}{x+1} = \frac{0}{0}$$

وهنا نستخدم طريقة القسمة الطويلة

$x^2 - x + 2$

$x + 1$ | $X^3 + x + 2$

$- x^3 \pm x^2$

$-x^2 + x + 2$

$-x2 \pm x$

$2x + 2$

$2x + 2$

0 0

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} x^2 - x + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

النهاية من طرف واحد: One side limit

هناك بعض الاقترانات مثل الاقتران المتشعب يكون فيها الاقتران غير معرف عند نقطة (نقاط) التشعب ولايجاد النهاية لمثل هذه الاقترانات نحتاج الى طريقة لاثبات أن النهاية ستكون واحد سواء أخذت أكبر من النقطة أو اقل من النقطة، وفي بعض الاقترانات الاخرى يكون الاقتران معرف على فترة محددة مثل اقترانات الجذور وفي مثل هذه الاقترانات اذا أردنا معرفة سلوك الاقتران عند نقطة نهاية التعريف نأخذ النهاية من طرف واحد فقط كما في الامثلة التالية:

مثال:

ابحث في نهاية الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$ عندما $x \to 0$

الحل:

نرى هنا أن الاقتران غير معرف عندما $x < 0$ وبالتالي لا نستطيع أخذ قيم للنهاية عندما $x < 0$ ، وهنا نأخذ النهاية من طرف واحد فقط وهو عندما $x > 0$ أي من اليمين ونرمز لها بالرمز $x \to 0^+$

ولنشكل الجدول التالي

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
f(x)	0.32	0.1	0.032	0.01

نرى هنا أنه كلما اقتربت x من صفر من اليمين يقترب f(x) من صفر وبالرموز

$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0$

أو $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

أي نهاية f(x) من اليمين تساوي صفر.

تعريف: (النهاية من اليمين)

اذا كان f اقتران معرف على الفترة (a , c) وكانت $L \in R$

فإن $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L$

تكون صحيحة اذا كان $0 < \delta \exists$ ، $0 < \in \forall$ بحيث

$a < x < \delta + a \Rightarrow |f(x) - L| < \in$

مثال:

ابحث في نهاية الاقتران $f(x) = \sqrt{1 - x}$ عندما x تقترب من 1

الحل:

في هذا المثال ايضاً نرى أن الاقتران غير معرف عندما $x > 1$ وبالتالي سنأخذ القيم التي تكون أقل من (1) وهذه تسمى النهاية من اليسار ونرمز لها بالرمز $x \to 1^-$ كما في الجدول التالي:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x)	0.32	0.1	0.032	0.01

نرى هنا أيضا أنه كلما اقتربت x من (1) من اليسار يقترب f(x) من صفر، وبالرموز $x \to 1^-$ فان $f(x) \to 0$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ أو

أي نهاية f (x) من اليسار تساوي صفر

تعريف:

اذا كان f إقتران معرف على الفترة (c , a) وكان $L \in R$ فان

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

صحيحة اذا كان $\forall \in > 0$ ، $\exists \delta > 0$ بحيث

$$a- \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \in$$

مثال:

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x > 3 \\ 2x + 1 & x < 3 \end{cases}$$

جد:

1- $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

2- $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

الحل:

1- $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

نأخذ قاعدة الاقتران عندما x > 3 أي عندما x تؤول الى 3 من اليمين.

$$\therefore \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 2 = (3)^2 - 2 = 7$$

2- $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

نأخذ قاعدة الاقتران عندما x < 3 أي عندما x تؤول الى 3 من اليسار

$$\therefore \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2x + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

نلاحظ من خلال المثال أن النهاية من اليمين والنهاية من اليسار متساويتان وهذا يعني أن النهاية موجودة، وهذا ما ستوضحه النظرية التالية:

نظرية:

اذا كان f معرف على فترة مفتوحة I تحوى a وليس بالضرورة أن يكون الاقتران معرف عندها فان

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال:

باستخدام النهاية من اليمين والنهاية من اليسار اثبت أن نهاية الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \ , \ x \neq 0 \end{cases}$$

غير موجودة عند $x = 1$

الحل:

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

بما أن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

مثال:

جد $\lim_{x\to 2}|x-2|$ اذا كانت موجودة

الحل:

نعيد تعريف الاقتران باستخدام قاعدة الاقتران المتشعب

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x > 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$$

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار عند x = 2

$$\lim_{x\to 2^+} |x-2| = \lim_{x\to 2^+} x-2 = 2-2 = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} |x-2| = \lim_{x\to 2^-} 2-x = 2-2 = 0$$

بما أن

$$\lim_{x\to 2^+} |x-2| = \lim_{x\to 2^-} |x-2| = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} |x-2| = 0$$

مثال:

اذا كان $f(x) = [1 - x]$ جد النهايات التالية اذا كانت موجودة

a- $\lim_{x\to 0} f(x)$ b- $\lim_{x\to 1.5} f(x)$

الحل:

نعيد تعرف الاقتران على الفترة [1- , 2) والتي تشمل نقطتي النهاية

$$F(x) = \begin{cases} 2 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

a- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2 = 2$

بما أن

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

ب- نلاحظ هنا أن القيمة 1.5 تقع ضمن الفترة (2، 1) وليست من اطرافها وبالتالي لا تستخدم هنا النهاية من اليمين والنهاية من اليسار وتكون

$\lim_{x\to 1.5} f(x) = \lim_{x\to 1.5} 0 = 0$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

فجد $\lim_{x\to 1} f(x)$ ان وجدت

الحل:

في هذه الحالة تكون النهاية من اليمين والنهاية من اليسار على نفس القاعدة

$$\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$= \lim_{x \to 1^+} x^2 + x + 1$

$= 1^2 + 1 + 1 = 3$

$$\lim_{x \to 1^1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 3$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x < 1 \\ -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

فجد $\lim_{x \to 1} f(x)$ اذا كانت موجودة.

الحل:

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين = النهاية من اليسار نجد في البداية النهاية من اليمين

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -1 = -1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{|x|}{x}$$

في هذه الحالة نعيد تعريف الاقتران $\frac{|x|}{x}$ لايجاد النهاية

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ونجد النهاية لهذا الاقتران من اليسار فقط

النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to1^-}1=1$$

$$\therefore \lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x)$$ غير موجودة

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-1}{x+1} & x\geq 1\\[2ex] ax-1 & x<1\end{cases}$$

فجد قيمة a التي تجعل $\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة

الحل:

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-1}{x+1}=\frac{2(1)^2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} ax-1=(a)(1)-1=a-1$$

بما أن النهاية موجودة ∴ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\therefore \frac{1}{2}=a-1$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

∴ قيمة a التي تجعل النهاية موجودة هي $\frac{3}{2}$

النهاية في اللانهاية: Limit in Infinity

تعريف:

اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ فإن الخط المستقيم x = a يكون خط تقارب عمودي لمنحنى الاقتران f(x) .

مثال: اذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ فأوجد:

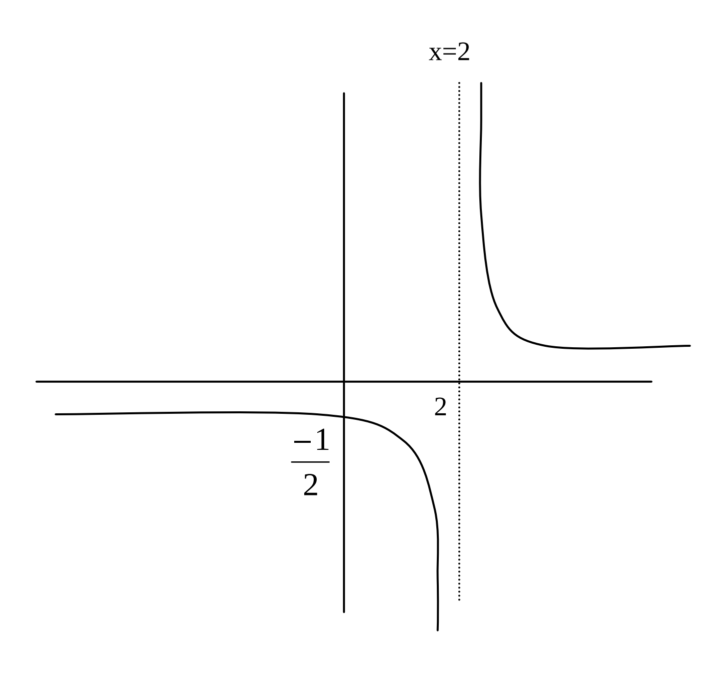
أ) $\lim_{x\to 2} f(x)$

ب) ارسم منحنى الاقتران f(x) وحدد عليه خط التقارب العمودي.

الحل:

أ) $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$$

ب) من خلال النهاية نلاحظ أن منحنى الاقتران له خط تقارب عمودي عند x = 2 كما في الشكل التالي:



تعريف:

اذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ فإن الخط المستقيم $y = L$ يكون خط تقارب أفقي لمنحنى الاقتران $f(x)$.

مثال: اذا كانت $f(x) = \frac{4x+2}{x}$ فأوجد

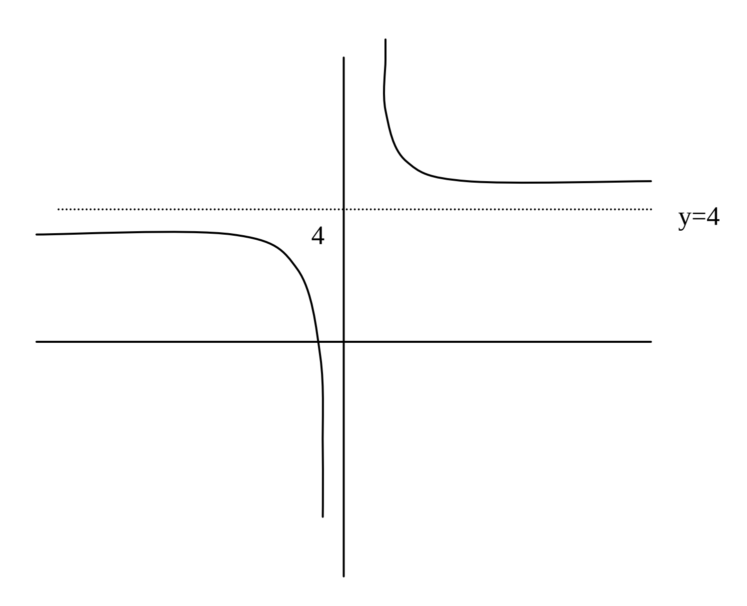
أ) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

ب) أرسم منحنى الاقتران $f(x)$ وحدد عليه خط التقارب الافقي.

الحل:

أ) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+2}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(4 + \frac{2}{x}\right) = 4$$

ب) من خلال النهاية نلاحظ أن منحنى الاقتران له خط تقارب أفقي عند $y = 4$، كما في الشكل التالي:



قواعد النهاية في اللانهاية

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad n \in N$

2) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad n \in N$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{if } m = n \\ \infty & \text{if } m < n \\ 0 & \text{if } m > n \end{cases}$$

مثال: جد نهاية كل من الاقترانات التالية عندما $x \to \infty$

1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

3) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 6}{x^2 - 4x - 2}$

4) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2 + 5}$

5) $f(x) = \frac{x + 1}{x^5 - 2x + 7}$

الحل:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^4 - 3x^2 + 1 = \lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$

3) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x + 6}{x^2 - 4x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 3 = 3$

4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} x = \infty$

5) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{x^5 - 2x + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

الاتصال: Continuity

لنأخذ المثالين التاليين وندرس سلوكهما ثم نرى ما الفرق بينهما

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$$

لندرس سلوك هذا الاقتران عند x = 1 مع ملاحظة أن الاقتران معرف عند x = 1 نجد في البداية نهاية الاقتران عن طريق النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - 1$$

$= (2)\ (1)\ - 1 = 1$

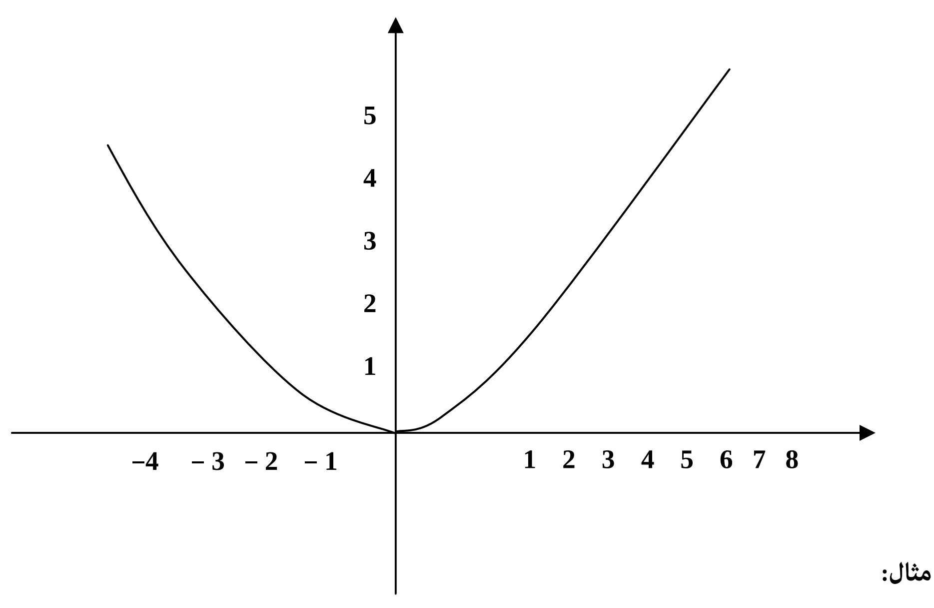
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 1$

$f(1) = (2)\ (1) - 1 = 1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

وعند رسم الاقتران نرى هنا أنه لا يوجد قطع في الاقتران أي أنه مستمر أو متصل.



مثال:

ادرس سلوك الاقتران التالي:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

الحل:

نرى هنا أن الاقتران معرف عند $x = 2$

ولايجاد نهاية الاقتران عندما x تقترب من (2) نأخذ الجزء الاول من الاقتران سواء من اليمين أو اليسار.

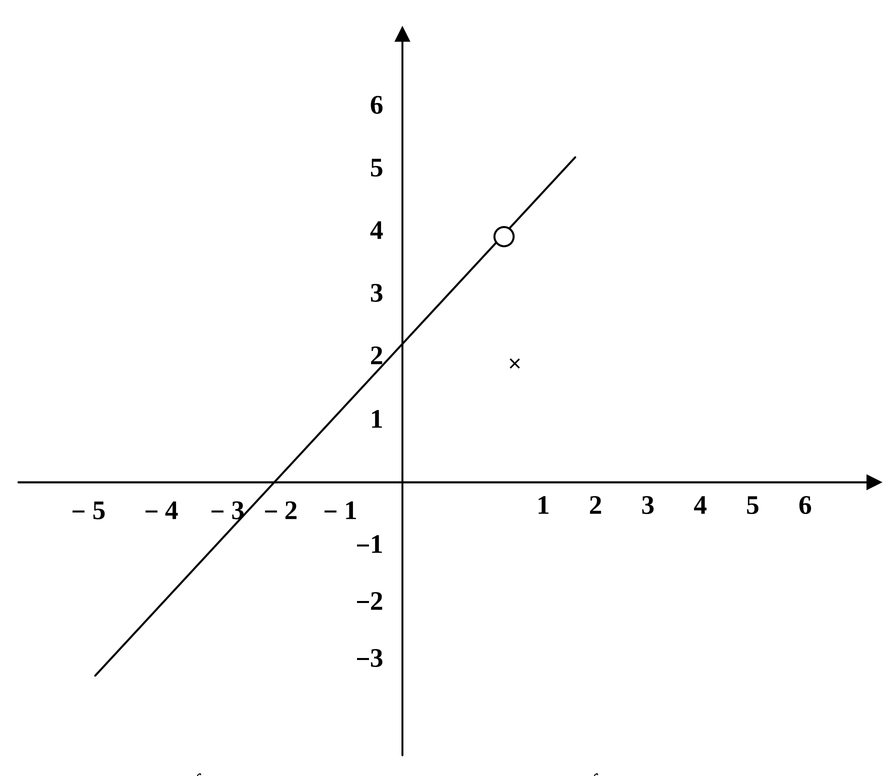
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} x + 2 = 4$$

أما $f(2) = 2$

ونرى هنا أن $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

وعند رسم الاقتران بيانياً نجد أن هناك قطع في الاقتران عند $x = 2$



من ملاحظتنا للمثالين السابقين نرى أن الاقتران الاول متصل بمعنى ان لا يوجد أي قطع في منحنى الاقتران بينما الاقتران الثاني غير متصل أي يوجد قطع للاقتران عند $x = 2$ وقد حقق الاقتران الاول الشروط التالية وهي الشروط التي يجب ان تتحقق في الاقتران حتى يكون متصل عند أي نقطة مثل $x = a$:

1- أن يكون الاقتران معرف عند $x = a$

2- نهاية الاقتران موجودة عند $x = a$

3- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

وفي مثالنا الثاني لاحظنا أن $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

أي أن الاقتران لم يحقق الشرط الثالث من شروط الاتصال وبالتالي يكون الاقتران غير متصل (منفصل) اذا لم يحقق شرط أو أكثر من الشروط السابقة

مثال:

ابحث في اتصال الاقتران التالي عند x = 1

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

الحل:

1- من تعريف الاقتران نجد أن الاقتران معرف عند x = 1

-2 $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} x+1 = 2$

-3 $f(1) = 2 = \lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$

∴ الاقتران متصل عند x = 1

مثال:

ابحث في اتصال الاقتران التالي عند x = 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x > 3 \\ x+1 & x \leq 3 \end{cases}$$

الحل:

1- الاقتران معرف عند x = 3

2- لايجاد $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ نجد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x+1$$
$$= 3 + 1 = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} x+3 = 6$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ $f(x)$ غير متصل عند $x = 3$

نظريات في الاتصال:

نظرية 1: اذا كان $f(x)$ اقتران كثير حدود فإنه متصل عند أي نقطة في مجموعة الاعداد الحقيقية.

نظرية 2: اذا كان $f(x)$ متصل عند $x = a$ وكان $h(x)$ متصل أيضا عند $x = a$ فأن:

-1 $f \pm h$ متصل عند $x = a$

-2 $f\ .h$ متصل عند $x = a$

-3 $\frac{f}{h}$ حيث $h(a) \neq 0$ متصل عند $h = a$

نظرية 3: اذا كان $f(x)$ متصل عند $x = a$ وكان $h(x)$ متصل عند $x = f(a)$ فان $(h \circ f)(x)$ متصل عند $x = a$

مثال:

اذا كان $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

وكان $h(x) = x^3 - 7x$

فهل $(f \circ h)(x)$ متصل عند كل نقطة في R

الحل:

بما ان $f(x)$ اقتران كثير حدود فهو متصل عند أي نقطة على R وايضا $h(x)$ اقتران كثير حدود فهو متصل عند أي نقطة على R.

$\therefore$ حسب النظرية السابقة $(f \circ h)(x)$ متصل عند كل نقطة من نقاط R

نظرية 4: يكون الاقتران $f(x)$ متصل على الفترة $[a , b]$ اذا كان متصل عند كل نقطة من نقاط الفترة.

مثال:

اذا كان

$$F(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ 2x - 1 & x < 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران على الفترة [4، 0]

الحل:

الاقتران يغير مساره عند (x = 2) ويكون كثير حدود عند باقي نقاط الفترة

$\therefore$ يكون الاقتران متصل على الفترة اذا كان متصل عند x = 2 وعند أطراف الفترة

1- f معرف عند x = 2

2- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x + 1 = 2 + 1 = 3$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

3- $f(2) = 3$

∴ الاقتران متصل عند x = 2 ومتصل عند أطراف الفترة لأنه كثير حدود عندها، وبالتالي يكون متصل على الفترة [0 ، 4]

نهايات الاقترانات المثلثية: Limits of trigonomatric function

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

نظرية: اذا كانت x أي زاوية فان:

1- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

3- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

مثال:

جد النهاية لكل من الاقترانات المثلثية التالية:

1- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$

2- $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

3- $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$

4- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x \sec x}$

الحل:

1- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{5}{3} \sin 5x}{\frac{5}{3} 3x} = \frac{5}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$$

نفرض $y = 5x$ ، $x \to 0 \Leftarrow y \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

وبشكل عام فان

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

2- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$ نقسم البسط والمقام على x

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

3- $$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$y = 0 \Leftarrow x \to \infty$, $y = \frac{1}{x}$ نفرض

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

4- $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x\sec x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\frac{x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}.\cos x$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = (2)(1) = 2$$

تمـــــارين

1- جد النهايات التالية:

a- $\lim_{x\to 7} x^4 - 5x^3 + 2x - 10$

b- $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

c- $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

d- $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$

e- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

f- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right)$

g- $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

h- $\lim_{x\to 22} \dfrac{x - 22}{\sqrt[3]{x+5} - 3}$

i- $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - x^3 - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$

2- جد النهاية لكل من الاقترانات التالية عند النقطة المبينة ازاء كل منها

a) $f(x) = |2x - 3|$ $\qquad x = \frac{3}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ $\qquad x = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x > 3 \\ 5 - x & x < 3 \end{cases}$ $\qquad x = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$ $\qquad x = 0$

3- ابحث في اتصال الاقترانات التالية:

a) $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x < 2 \\ 8 & x = 2 \\ -2x + 12 & x > 0 \end{cases}$

c) f(x) = $|x - 3|$

d) f(x) = $\frac{x^2-4}{x+2}$

e) f(x) = $\begin{cases} \frac{x}{x-5} & x \neq 5 \\ 3 & x = 5 \end{cases}$

f) f(x) = $\frac{1}{2}\left(x+|x|\right)$

4- اذا كان $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\sqrt{x}$

فهل (h O f) متصل عند x = 8 ، x = 2 ، x = 0

5- جد قيمة m التي تجعل f(x) متصلاً في كل من الاقترانات التالية:

a) f(x) = $\begin{cases} \frac{2x^2-4}{x} & x > 1 \\ m & x \leq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x > 0 \\ m & x \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{2} & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$

6- جد نهاية كل من الاقترانات المثلثية التالية:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{4x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

7- اذا كان $f(x) = \sqrt{x+1}$

فجد

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

8- اذا كان $f(x) = \sqrt{x+1}$

فجد

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

9- أوجد خطوط التقارب الافقية والعمودية لكل من الاقترانات التالية

1) $f(x) = \frac{3}{x-4}$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = \frac{4x^2 - 2x}{2x^2 + 3x - 8}$

10- أوجد نهاية كل من الاقترانات التالية عندما $x \to \infty$

1) $f(x) = \dfrac{7x^3 - 5x + 2}{3x^3 - 1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^4 + x - 9}{x^2 - 5}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 1}{3x^5 + 5x^3 + 15}$

11- جد النهايات التالية:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 5}}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$

12- اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{2x - 1} & x > 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x - 1} & x < 0 \end{cases}$$

فجد

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

13- ارسم منحنيات كل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+6}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

14- باستخدام تعريف النهاية اثبت أن

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3} = -6$$

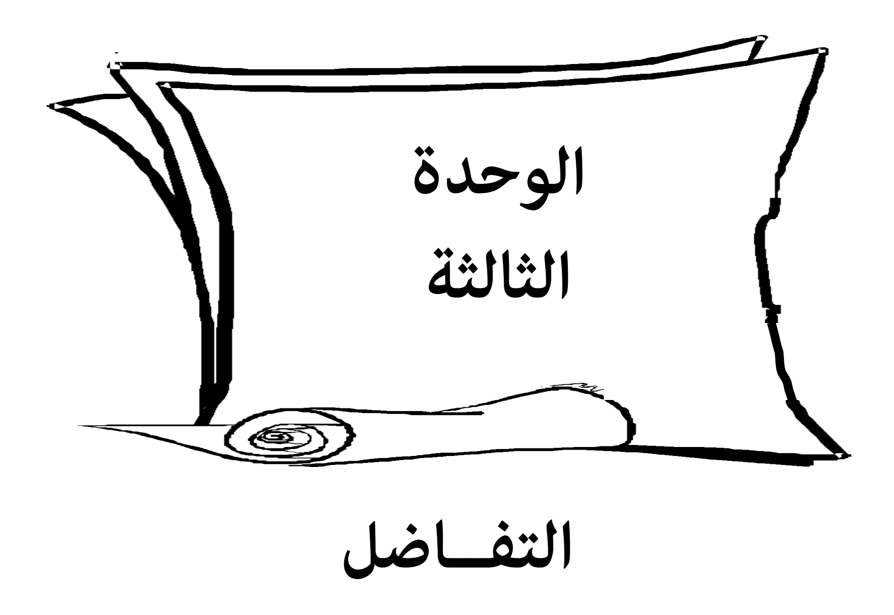
15- جد النقاط التي يكون عند الاقتران f(x) منفصل ان وجدت لكل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-2}$

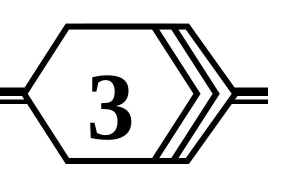
c) $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+5x-2}$



التفــاضل

Differentiation



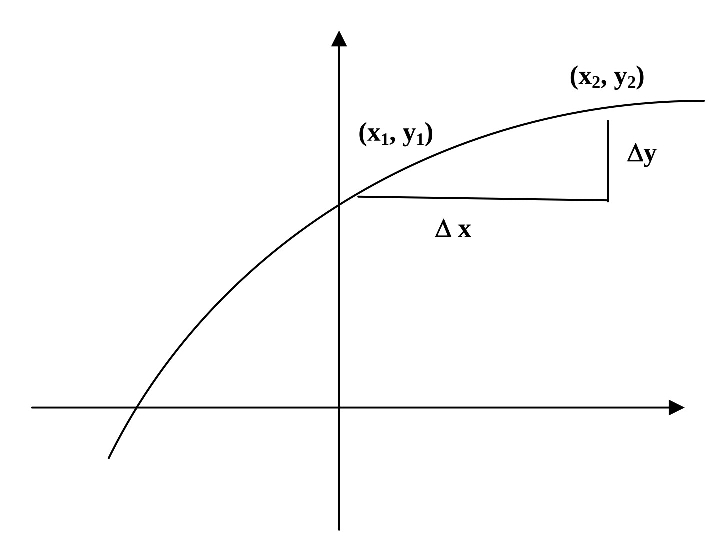
الوحدة الثالثة

التفــاضل

Differentiation

متوسط التغير: Rate of Change

اذا كان $f(x)$ اقتران معرف على الفترة (a , b) ومنحناه يمثل الشكل التالي:



واخذنا النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) على منحنى الاقتران فان التغير في قيمة x ما بين هاتين النقطتين هو $x_2 - x_1$ ويرمز له بالرمز Δx وتقرأ دلتا x والتغير في قيمة y هي

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\text{ويكون متوسط التغير} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

حيث

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^2 - 2x + 5$ وتغيرت x من $x_1 = 0.1$ إلى $x_2 = 0.3$ فجد ما يلي:

a) Δx.

b) Δy.

c) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

الحل:

a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 0.3 - 0.1 = 0.2$

b) $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$= f(0.3) - f(0.1)$

$= [(0.3)^2 - 2(0.3) + 5] - [(0.1)^2 - 2(0.1) + 5]$

$= 4.49 - 4.81$

$= -0.32$

c) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.32}{0.2} = -1.6$$

ميل المماس: Slop of tangent

يعرف ميل الخط المستقيم على أنه فرق الصادات على فرق السينات

أي

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وهذا التغير هو تعريف متوسط التغير

$$\therefore\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أما معادلة الخط المستقيم فهي:

$$(y - y_1) = m\ (x - x_1)$$

ومعادلة العمود هي

$$\left(y - y_1\right) = \frac{-1}{m}\left(x - x_1\right)$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم والعمودي عليه المار بالنقطتين (1, 2)، (-3, 4)

الحل:

نجد في البداية ميل الخط المستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{4-2}{-3-1} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

ومعادلة الخط المستقيم هي:

$$(y - 2) = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow 2y = 5 - x$$

أما معادلة العمودي فهي

$$(y - y_1) = \frac{-1}{m}\ (x - x_1)$$

$$\Rightarrow \left(y - 2\right) = \frac{-1}{\frac{-1}{2}}\left(x - 1\right)$$

$$\Rightarrow\ y - 2\ = 2(x-1)$$

$$\Rightarrow\ y - 2 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow\ y = 2x$$

أما ميل المماس للاقتران فانه يكون ميل الخط المستقيم من نقطة تماسه مع الاقتران ويكون هذا الميل هو نهاية متوسط التغير أي

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 \to x_1}$$

اذا كانت

$x_2 = x_1 + \Delta x \quad \Leftarrow \quad \Delta x = x_2 - x_1$

$$\therefore\ m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

مثال:

جد ميل المماس للاقتران $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 2$

الحل:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(2 + \Delta x)^2 + 1 - (2(2)^2 + 1)}{\Delta x_1} = \frac{8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1 - 8 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} 8 + 2\Delta x = 8$$

المشتقة: The derivative

تعريف: اذا كان f(x) اقتران معرف على الفترة [a , b] وكانت $x_1 \in (a, b)$ فان مشتقة الاقتران f(x) عند $x = x_1$ ويرمز لها بالرمز $f'(x_1)$ هي

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

ويرمز لها أيضا بعدة رموز منها

$$\frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}$$

ملاحظة: تكون المشتقة موجودة إذا كانت النهاية موجودة

مثال:

اذا كان $f(x) = 3x - 7$ فجد $f'(1)$

الحل:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3(1+h)-7)-(3(1)-7)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3+3h-7-3+7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = 3$$

تعريف:

يكون الاقتران f قابل للاشتقاق على الفترة (a , b) اذا كانت مشتقة f موجودة عند كل نقطة من نقاط الفترة.

مثال:

اذا كان $f(x) = x^2$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + h$$

$$= 2x$$

مثال:

اذا كان $f(x) = \sqrt{x+1}$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h}$$ بالضرب بالمرافق

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1) - (x+1)}{h\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h \times (x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

ملاحظة: نلاحظ من تعريف المشتقة عند $x = x_1$ أنها ميل المماس عند النقطة $(x_1, f(x_1))$ حيث رمزنا لـ Δx بالرمز h .

نظرية: اذا كان f قابل للاشتقاق عند $x = x_0$ فإن f متصل عن $x = x_0$

ملاحظة: عكس النظرية غير صحيح والمثال التالي يوضح ذلك

مثال:

اذا كانت $f(x) = |x|$ فهل f متصل وقابل للاشتقاق

الحل:

أولا: نبحث في إتصال الاقتران

نعيد تعريف الاقتران

$$f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

نجد النهاية من اليمين ومن اليسار:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

$\therefore$ f متصل عند x = 0

ثانيا: نبحث في قابلية الاشتقاق من اليمين واليسار عند x = 0

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(h+0)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

$\therefore$ f متصل ولكنه ليس قابل للاشتقاق .

قواعد الاشتقاق: Techniques of differentiation

1- اذا كان $f(x) = c$ حيث c ثابت فان
$f'(x) = 0$

مثال:

اذا كان $f(x) = 97$ فجد $f'(x)$

$f'(x) = 0$

2- اذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد طبيعي
فان $f'(x) = n\,x^{n-1}$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^3$ فجد $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2$

3- اذا كان $f(x)$, $h(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فان
$(f \pm h)'(x) = f'(x) \pm h'(x)$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = x^4 - x^2 + 12$

$f'(x) = 4x^3 - 2x + 0$

$= 4x^3 - 2x$

4- اذا كان $f(x)$ اقتران قابل للاشتقاق وكانت k عدد حقيقي فان
$(k\,f(x)') = k\,f'(x)$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 5x$

$f'(x) = (3)\,(3)x^2 + (7)\,(2)x - (5)\,(1)$

$= 9x^2 + 14x - 5$

5- اذا كان f(x)، h(x) اقترانين قابلين للاشتقاق فان

$$(f \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = (2x^2 - 4)(4x + 3)$

$$f'(x) = (2x^2 - 4)(4) + (4x)(4x + 3)$$
$$= 8x^2 - 16 + 16x^2 + 12x$$
$$= 24x^2 + 12x - 16$$

6- اذا كان f(x) , h(x) قابلين للاشتقاق فان

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2} \qquad , h(x) \neq 0$$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{(0) \cdot (x) - (1)(1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال:

اذا كانت $y = \frac{x+1}{x^2}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)'(x^2) - (x+1)(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4}$$
$$= \frac{-x^2 - 2x}{x^4}$$

7- اذا كان $f(x) = x^{-n}$ حيث n عدد طبيعي

فان $f'(x) = -n\, x^{-n-1}$

مثال:

اذا كان $f(x) = \frac{1}{x^2}$ فجد $f'(x)$

الحل:

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$

$= \frac{-2}{x^3}$

8- اذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ **حيث** $m, n \in I$

فان

$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

مثال:

اذا كانت $y = \sqrt{x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ فجد $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

مثال:

جد معادلة المماس للاقتران $f(x) = 3x^2 - 4x$ عند النقطة $(1, -1)$

الحل:

معادلة المماس هي $(y - y_1) = m(x - x_1)$

$\therefore$ نجد في البداية ميل المماس $= m = f'(1)$

$f'(x) = 6x - 4 \Rightarrow f'(1) = (6)(1) - 4 = 2$

$\therefore m = f'(1) = 2$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$(y + 1) = 2(x - 1)$

$\Rightarrow y + 1 = 2x - 2$

$\Rightarrow y = 2x - 3$

مشتقة الاقترانات المثلثية: Derivatives of trigonometric function

نعرف مشتقة الاقترانات المثلثية عن طريق الجدول التالي:

f(x)	f ′(x)
sin x	cos x
cos x	- sin x
tan x	sec^2 x
cot x	- csc^2 x
sec x	sec x tan x
csc x	-csc x cot x

مثال:

جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = \cos x + 3 \sin x$

b) $f(x) = x \tan x + x^2 \sec x$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \csc x$

الحل:

a) $f'(x) = - \sin x + 3 \cos x$

b) $f'(x) = \tan x + x \sec^2 x + 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$

c) $f'(x) = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \csc x \cot x$

مثال:

اذا كانت $y = \tan x$ فأثبت أن $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$

الحل:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin x^2}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

قاعدة السلسلة: The Chain Rule

اذا كانت $z = h(x)$, $y = f(z)$

فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (f \circ h)'(x)$$

$= f'(z) . h'(x)$

$= f'(h(x)) . h'(x)$

مثال:

اذا كانت $y = 3z^2 - 5$, $z = x^3 + 4x$

فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$= (6z)\ (3x^2 + 4)$

$= 6\ (x^3 + 4x)\ (3x^2 + 4)$

مثال:

اذا كانت $y = (3x^2 - 6x)^4$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لتكن $z = 3x^2 - 6x \Longrightarrow y = z^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$= 4(z^3)\,(6x - 6)$

$= 4(3x^2 - 6x)^3\,(6x - 6)$

نتيجة: اذا كانت $y = (h\,(x))^n$

فان $\frac{dy}{dx} = n(h(x))^{n-1}h'(x)$

مثال:

اذا كانت $y = (4x - 7)^3$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (3)(4x-7)^2(4)$$

$= 12\,(4x - 7)^2$

مثال:

اذا كانت $y = \sqrt{(2x-3)^3}$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$y = (2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$= 3\sqrt{2x-3}$$

الاشتقاق الضمني: Implicit differentiation

هناك بعض الاقترانات يمكن فصل المتغير x عن المتغير y فيها ولكن هناك بعض الاقترانات لا يمكن فصل المتغيرات عن بعضها البعض وفي مثل هذه الاقترانات عندما نشتق y نضربها في $\frac{dy}{dx}$ وسنوضح الاشتقاق الضمني عن طريق الامثلة التالية:

مثال:

جد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y^2 + x^2 = 1$

الحل:

يمكن ايجاد المشتقة هنا بطريقتين:

الطريقة الاولى: نفصل المتغيرات

$$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot -2x$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

الطريقة الثانية: نشتق ضمنياً

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

مثال:

جد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران

$y^2 + 2xy + x^2 = y^2 x$

الحل:

$$2y\frac{dy}{dx} + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2x = 2yx\frac{dy}{dx} + y^2$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y + 2x - 2xy\right) = y^2 - 2y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2y - 2x}{2y + 2x - 2xy}$$

مثال:

اذا كانت $y = \sin(xy)$

فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos xy(y + x\frac{dy}{dx})$$

$$= y\cos xy + x\cos xy\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - x\cos xy\frac{dy}{dx} = y\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - x\cos xy) = y\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos xy}{1 - x\cos xy}$$

المشتقات العليا: Higher derivatives

مشتقة الاقتران $f(x)$ هي $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ وتسمى المشتقة الاولى

ومشتقة الاقتران $f'(x)$ هي $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ وتسمى المشتقة الثانية

ومشتقة الاقتران $f''(x)$ هي $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ وتسمى المشتقة الثالثة

وهكذا حتى نصل إلى المشتقة النونية وهي $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$

مثال:

جد المشتقة الثالثة للاقتران $y = \sin^2 x$

الحل:

$y = \sin^2 x$

المشتقة الاولى

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$$

المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

المشتقة الثالثة

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\cos x\sin x - 4\sin x\cos x$$

$$= -8\cos x\sin x = -4\sin 2x$$

تعريف:

اذا كانــــت المســــافة التــــي يقطعهــــا جســـــم معطــــاه بدلالــــة الــــزمن f(t) فــــان السرعة = مشتقة المسافة بالنسبة للزمن، وايضاً التسارع = مشتقة السرعة بالنسبة للزمن = المشتقة الثانية للمسافة بالنسبة للزمن، أي:

السرعة $$v = \frac{df}{dt}$$

التسارع $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2f}{dt^2}$$

مثال:

يتحرك جسيم في المستوى وفق العلاقة $f(t) = 3t^3 - 4t^2 + 7$ حيـث f المسـافة بالامتـار. جـد بعـد ثانيتين من بدء حركته

1- المسافة التي قطعها الجسيم

2- سرعة الجسيم.

3- تسارع الجسيم.

الحل:

1- المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين هو $f(2) = 3(2)^3 - 4(2)^2 + 7$

$= 24 - 16 + 7 = 15m$

2- السرعة $$v = \frac{df}{dt} = 9t^2 - 8t$$

$$\therefore v(2) = 9(2)^2 - 8(2) = 20m/s$$

3- التسارع $$a = \frac{dv}{dt} = 18t - 8$$

$$\therefore d(z) = (18)(2) - 8 = 28m/s^2$$

مثال:

قـــذف جســـم رأســـياً للاعـــلى فـــاذا كـــان ارتفـــاع الجســـم بعـــد t ثانيـــة هـــو $f = 36t - 9t^2$ حيث f المسافة بالامتار. إحسب

أ- أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

ب- الزمن الذي يبقى فيه الجسم فوق مستوى سطح الارض.

الحل:

أ- عند اقصى ارتفاع تكون $v = 0$

$$v = 36 - 18\,t = 0 \Longrightarrow t = 2\ s$$

$\therefore$ أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم $f(2) = (36)(2) - 9(2)^2 = 36m$

ب- الزمن الذي يبقى فيه الجسم فوق مستوى سطح الارض =

زمن الصعود + زمن النزول

$= 2 + 2 = 4S$

التفاضلات: Differentials

رمزنا في بداية هذه الوحدة لمتوسط التغير بالرمز $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

حيث

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

واذا كانت $\Delta x = h$ فان

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وبأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ومن تعريف المشتقة فان

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

$$\Rightarrow dy=f'(x)\cdot dx$$

حيث dy تسمى تفاضله y (مقدار الزيادة في المتغير y)

dx تسمى تفاضله x (مقدارالزيادة في المتغير x)

مثال:

اذا كانت $y = x^2 - 2x + 3$ وكانت $dx = -0.2$ فجد dy عند $x = 2$

الحل:

$dy = f'(x) . dx$

$= (2x - 2) . dx$

$= ((2)(2) - 2)(-0.2)$

$= (2)(-0.2)$

$= -0.4$

مثال:

قدر نصف قطر بالون كروي 12 cm تقريباً مع خطأ في القياس اقصاه 0.05 cm جد اكبر خطأ في قياس الحجم

الحل:

نق = x ، الحجم = y

$x = 12 , dx = 0.05$

حجم الكرة هو $y=\frac{4}{3}x^3\pi$

$$dy = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 \pi dx$$

$$= 4\pi x^2 \cdot dx$$

$$= 4\pi(12)^2(0.05) = 28.8\pi cm^3$$

مثال:

جد قيمة تقريبية للمقدار $(1.02)^4$

الحل:

نفرض اقتران $y = x^4$ حيث $x = 1$ ، $dx = 0.02$

فتكون قيمة المقدار = $y + dy$

نجد في البداية dy

$$dy = f'(x) . dx$$

$$= 4x^3 . dx$$

$$= 4(1)^3 (0.02)$$

$$= 0.08$$

$$\therefore (1.02)^4 = y + dy$$

$$y = (1)^4 = 1$$

$$\therefore (1.02)^4 \approx 1 + 0.08 = 1.08$$

تمـــــارين

1- جد ميل المماس للاقترانات التالية عند النقطة ازاء كل منها

a) $f(x) = x^2 \quad , x = 3$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad , x = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x} \quad , \ x = \frac{1}{3}$

2- جد معادلة المماس والعمودي لكل اقتران في السؤال السابق.

3- باستخدام التعريف جد مشتقة الاقترانات التالية:

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = 1- x^2$

c) $f(x) = \sqrt{3x-4}$

d) $f(x) = \sin x$

e) $f(x) = h(x) . l(x)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4- جد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

a) $y = (2x^2 - 3x + 4)(x^2 - 4)$

b) $y = \frac{x+2}{x-1}$

c) $y = (\sin x + \cos x)^2$

d) $y = \dfrac{\tan^2 x}{\sec^3 x}$

e) $y = \sin^n x$

f) $y = \cot^3 4x^2$

g) $yx + y^3x = x^2$

h) $\dfrac{xy}{y^2 + x^2} = 6$

5- اذا كانت $y = z^2 , z = \sin x$ فجد $\dfrac{dn}{dx}$

6- اذا كانت $m = x^2 - 3x + 5 , m = 3n^3$ فجد $\dfrac{dn}{dx}$

7- جد المشتقة الثانية والثالثة لكل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6x$

b) $f(x) = \tan x$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

d) $y^2x + 2x^2 = y^3$

8- نصف قطر قرص دائري 10 بوصات تقريباً مع احتمال في الخطأ مقداره (0.09) بوصة باستخدام التفاضلات جد أكبر خطأ في قياس مساحة وجه القرص.

9- إستخدام التفاضلات لحساب الزيادة في حجم مكعب اذا تغير طول ضلعه من 8 cm الى 8.1 c.m

10- جد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{3.9}$

11- جد قيمة تقريبية للمقدار $(2.01)^4 - 3(2.01)^3 + 4(2.01)^2 - 5$

12- قذفت كرة الى الاعلى فاذا كان ارتفاع الكرة بالامتار بعد t ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة $f = t^4 - 32t^2$ فجد :

أ- اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

ب- السرعة عندما تعود الكرة وترتطم بالارض.

13- أوجد الاقتران $f(x) = ax^2 + bx + c$ والذي منحناه يقطع محور x عند $x = 1$ ويقطع محور y عند $y = -2$ وميل مماسه $m = -1$.

14- أوجد ميل المماس للاقتران $y^3 + y^2 + x^2 - 3y^2 = 0$ عند النقطة $(2 ,1)$

15- أوجد معادلة المماس للاقتران $f(x) = 3x^2 - x + 5$ ، عندما يكون العمودي عليه موازياً للمستقيم $y = 5x + 3$.

16- يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة $f = t^3 - 6t^2 + 1$ حيث f بالامتار، t بالثواني أوجد:

أ- المسافة والسرعة عندما يكون التسارع = صفر.

ب- المسافة والتسارع عندما تكون السرعة = صفر.

17- أثبت أن الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 1 \\ x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

متصل ولكن غير قابل للتفاضل عند $x=1$

18- جد قيمة a حيث $y=a\sin 3t$ والتي تحقق المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sin 3t - 2y$$

19- مكعب قيس طول ضلعه فكان 25cm بنسبة خطأ ± 0.1 جد الخطأ في قياس حجم المكعب .

20- اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ K(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

فما هي قيمة k التي تجعل الاقتران متصل وقابل للاشتقاق .



تطبيقات التفــاضل

Application of differentiation



الوحدة الرابعة
تطبيقات التفـاضل
Application of differentiation

المعدلات المرتبطة بالزمن: Related rates

عرفنا في الوحدة السابقة أن متوسط التغير $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ومعدل التغير $\frac{dy}{dx}$ هو معدل التغير في y بالنسبة لـ x

أما اذا كان التغير بالنسبة للزمن فان التغير في y هو $\frac{dy}{dt}$ والتغير في x هو $\frac{dx}{dt}$

مثال :

يتمدد نصف قطر بالون كروي بمعدل 2cm/s جد معدل الزيادة في مساحة سطحه عند r = 10cm

الحل:

في البداية نحدد العلاقة بين مساحة السطح ونصف القطر وهي

$A = 4r^2\pi$

نجد معدل التغير في المساحة بالنسبة للزمن وهي

$$\frac{dA}{dt} = 8r\pi\frac{dr}{dt}$$

$$r = 10cm, \frac{dr}{dt} = 2cm/s$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = (8)(10)\pi(2) = 160\pi cm^2/s$$

مثال :

خزان ماء اسطواني الشكل فيه ثقب من أسفل يخرج منه الماء بمعدل $0.05m^3/s$ جد سرعة انخفاض ارتفاع الماء في الخزان اذا كان نصف قطر الخزان 2m

الحل:

نحدد العلاقة بين حجم الماء وارتفاعه وهي:

$$V = \pi r^2 h$$

حيث V = تمثل الحجم، h = الارتفاع ، r = نصف القطر وهو ثابت

نجد معدل التغير في الحجم بالنسبة للزمن ومعدل التغير في الارتفاع بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.05m^3/s \qquad r = 2m$$

$$\therefore -0.05 = \pi(4)\frac{dh}{dt}$$

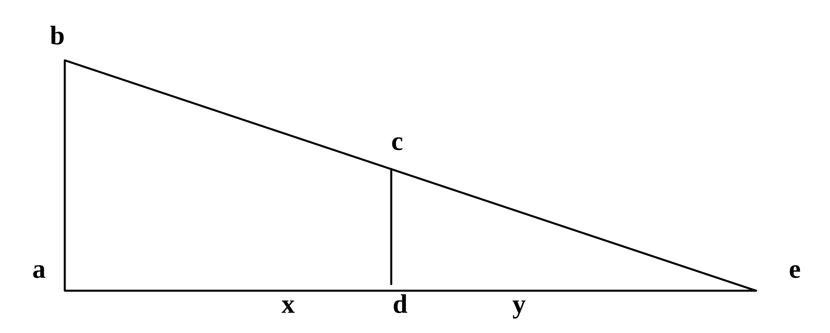
$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{-0.05}{4\pi} = \frac{-0.0125}{\pi} m/s$$

مثال :

رجل طوله مترين يسير بسرعة 8km/h مبتعداً عن مصباح معلق على ارتفاع 32m فوق سطح الارض جد معدل تزايد طول ظله.

الحل:

نرى في الشكل أن ارتفاع المصباح عن الارض يمثل القطعة المستقيمة ab وطول الرجل cd وطـول الظل de



نفرض أن de = y

ad = x

∴ من تشابه المثلثين abe , cde ينتج أن

$$\frac{y}{y+x} = \frac{2}{32}$$

بالضرب التبادلي

$32y = 2x + 2y$

$32y - 2y = 2x$

$30y = 2x$

$15y = x$

$$\Rightarrow 15\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

حيث $\frac{dx}{dt} = 8km/h$

∴ معدل الزيادة في طول الظل $\frac{dy}{dt} = \frac{8}{15}km/h$

مثال:

مكعب من الثلج يذوب بحيث يتناقص طول ضلعه بمعدل 0.1cm/s جد معدل التناقص في حجمه في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه 5cm

الحل:

العلاقة بين الحجم (v) وطول ضلعه (x) هي:

$$v = x^3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$x = 5 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -0.1$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 3(5)^2(-0.1)$$

$$= -7.5 cm^3/s$$

مثال:

مثلث حديدي متساوي الاضلاع طول ضلعه (10cm) فان سخن على النار فان مساحته تتغير بمعدل $.15 cm^2/s$. جد معدل التغير في طول ضلعه .

الحل:

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

فاذا رمز لطول ضلع المثلث بالرمز x فان ارتفاعه h = x sin 60

$$\therefore h = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}\right)(x)\frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

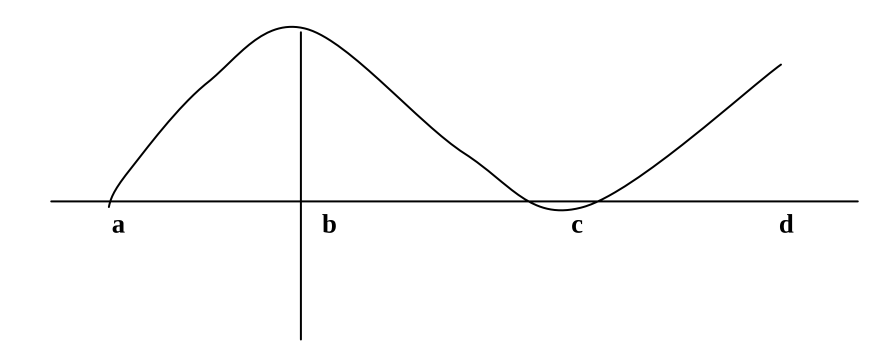
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 15 \quad , \quad x = 10$$

$$\therefore 15 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(10)\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{30}{(\sqrt{3})(10)} = \sqrt{3} \text{ cm/s}$$

فترات التزايد والتناقص: Intervals of increase and dearease



لو نظرنا إلى هذا الاقتران نرى أنه يتزايد في الفترة [a,b] ويتناقص في الفترة [b,c] ثم يعود ليتزايد في الفترة [c,d] ، ولتعريف التزايد والتناقص نأخذ التعريف التالي:

تعريف:

اذا كان f(x) معرف على الفترة [a,b] وكان $x_1 , x_2 \in [a,b]$ فان:

أ- يكون الاقتران f متزايد على الفترة [a,b] اذا كانت

$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ب- يكون الاقتران f متناقص على الفترة [a,b] اذا كانت

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

جـ- يكون الاقتران ثابت اذا كانت

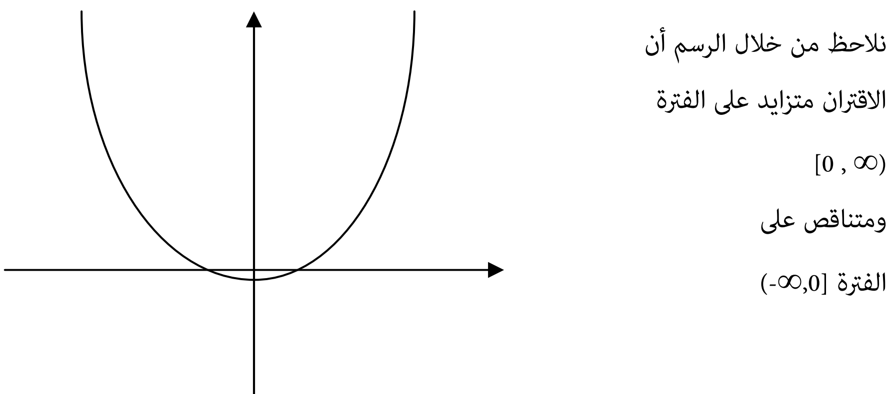
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

مثال:

ابحث في فترات التزايد والتناقص للاقتران $f(x) = x^2$



الحل:



نلاحظ من خلال الرسم أن

الاقتران متزايد على الفترة

$[0 , \infty)$

ومتناقص على

الفترة $(-\infty,0]$

نلاحظ هنا أننا اعتمدنا على الرسم في تحديد فترات التزايد والتناقص ولكن هذه الطريقة ليست فعالة في كل الاحيان ولذلك لابد من طريقة أخرى لتحديد فترات التزايد والتناقص وهذه الطريقة هي طريقة المشتقة الاولى.

نظرية:

اذا كان f اقتراناً متصلاً على الفترة المغلقة [a,b] وقابلاً للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) فان:

أ- f يكون متزايداً على الفترة [a,b] اذا كانت $f'(x) > 0 , \forall x \in (a,b)$

ب- f يكون متناقص على الفترة [a,b] اذا كانت $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$

نتيجة:

اذا كان f اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكانت $f'(x_1) = 0$ أو غير معرفة فان $(x_1, f(x_1))$ تسمى نقطة حرجة للاقتران (Critical Point).

مثال:

باستخدام المشتقة الاولى جد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لكل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = 1 + 4x - x^2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 13$

c) $f(x) = 4x^4 - 8x^2$

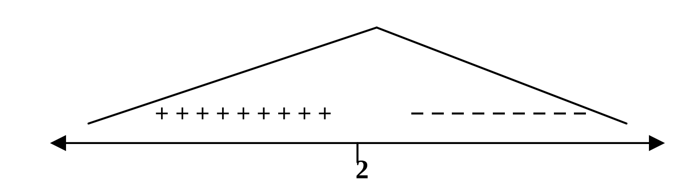
الحل:

a) $f(x) = 1 + 4x - x^2$

نجد في البداية المشتقة الاولى ونساويها بالصفر

$f'(x) = 4 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 2$



$\therefore$ يكون الاقتران متزايد على الفترة $[-\infty, 2]$

ومتناقص على الفترة $[2, \infty)$

أما النقطة الحرجة فهي $(2, 5)$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 13$

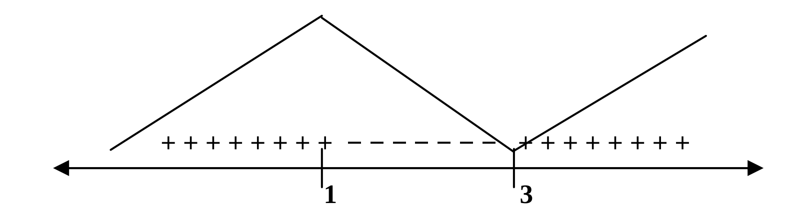
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

بالقسمة على (3)

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1 , x = 3$



∴ يكون الاقتران متزايد في الفترات (-∞ , 1] U [3 , ∞)

ومتناقص على الفترة [1 , 3]

أما النقاط الحرجة فهي (1 , 17) (3 , 13)

c) $f(x) = 4x^4 - 8x^2$

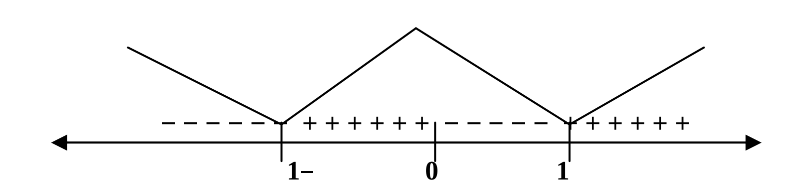
$f'(x) = 16x^3 - 16x$

بالقسمة على 16

$x^3 - x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 , x = 1 , x = -1$



∴ يكون الاقتران متزايد على الفترات $[-1 , 0] \cup [1 , \infty)$

ومتناقص على الفترات $(-\infty , -1] \cup [0 , 1]$

أما النقاط الحرجة فهي $(-1, -4)$, $(1 , -4)$, $(0 , 0)$

مثال:

جد النقاط الحرجة للاقتران $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

الحل:

نجد المشتقة الاولى وتساويها بالصفر

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{(x)(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

بالضرب التبادلي

$4 - x^2 = x^2$

$\therefore\ 2x^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

∴ النقاط الحرجة هي $\left(-\sqrt{2}, f\left(-\sqrt{2}\right)\right), \left(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})\right)$

$= \left(-\sqrt{2}, -2\right), \left(\sqrt{2}, 2\right)$

القيم القصوى: Extrema Values

تعريف:

ليكن $f(x)$ اقتران معرف على الفترة $[a,b]$ فاذا وجدت فترة مفتوحة $[c,d]$ تحوي x_1 فان:

أ- $f(x_1)$ تسمى قيمة عظمى محلية Local Maximum Value اذا كان

$f(x_1) \geq f(x)\ ,\ \forall\ x \in [a,b] \cap [c,d]$

ب- $f(x_1)$ تسمى قيمة صغرى محلية Local Minimum Value اذا كان

$f(x_1) \leq f(x)\ ,\ \forall\ x \in [a,b] \cap [c,d]$

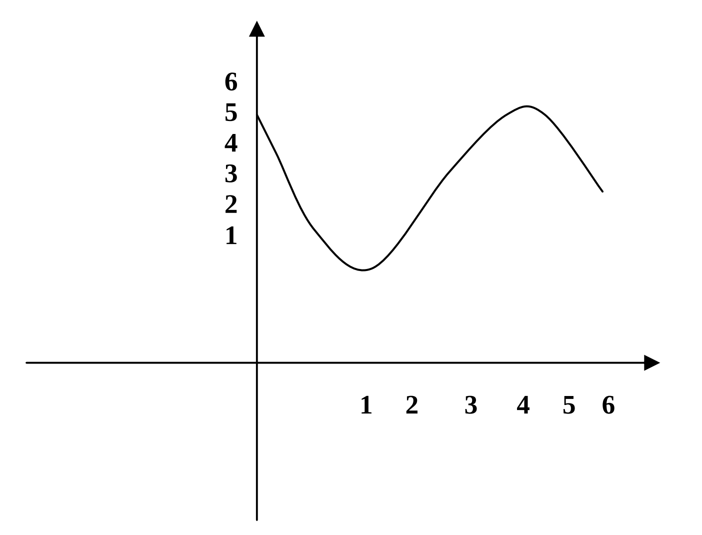
تسمى القيم العظمى والصغرى قيماً قصوى.

ملاحظة:

تكون القيمة القصوى مطلقة اذا كانت $[c,d] = [a,b]$

مثال:

الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران f(x) في الفترة [0,6] حدد القيم القصوى للاقتران



الحل:

للاقتران قيمة عظمى محلية عند x = 0 هي f(0) = 5 وايضا عند x =5 هي f(5)=6

ويوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند x = 2 هي f(2) = 1 وايضاً عند x = 6 هي f(6) = 3

أما القيم القصوى المطلقة فهي f(0) = 5 فهي قيمة عظمى مطلقة

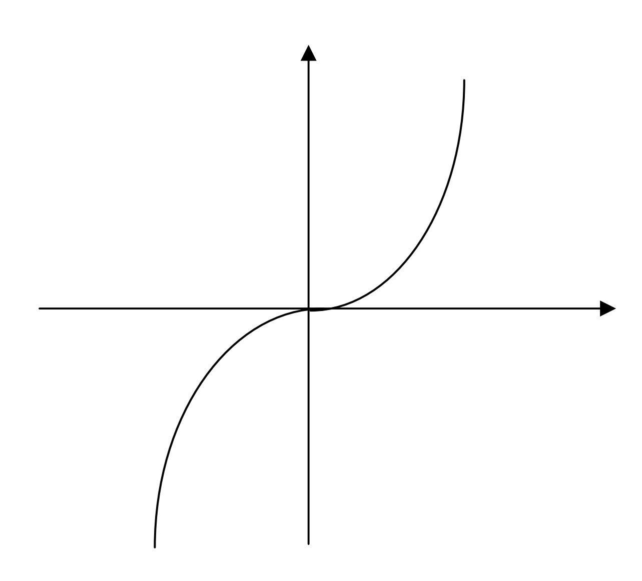
f(2) =1 وهي قيمة صغرى مطلقة

مثال:

اذا كان $f(x) = x^3$ معرف على R فهل للاقتران قيم قصوى

الحل:

نرسم الاقتران ويكون شكله كالآتي:



نلاحظ من خلال الرسم أن الاقتران لا يحوي أي قيم قصوى

ملاحظة:

اذا كانــــت $f(x_1)$ قيمـــــة قصــــوى فـــان $f'(x_1) = 0$ أو غـــير موجـــودة ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيح.

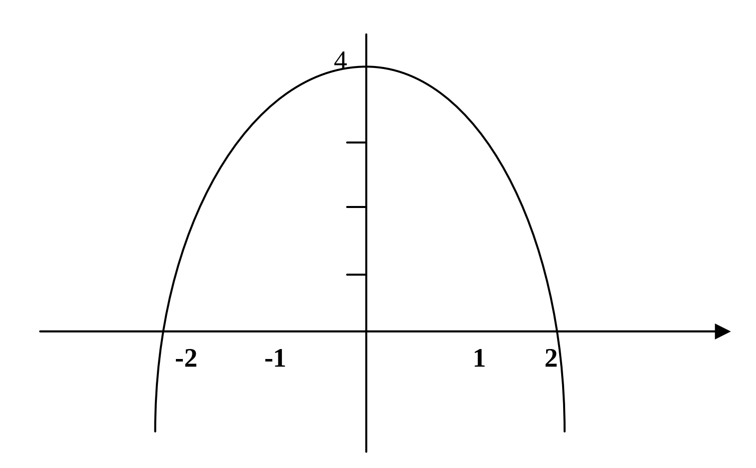
والمثال السابق دليل على عدم صحة عكس النظرية حيث $f'(0) = 0$ لكن لا يوجد قيمة قصوى عند $x = 0$

مثال:

جد القيم القصوى للاقتران $f(x) = 4 - x^2$

الحل:

نجد القيم القصوى من خلال الرسم



ونلاحظ أنه يوجد قيمة عظمى عند $x = 0$

هي $f(0) = 4$

وايضاً نلاحظ أن $f'(x) = 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

أي $f'(0) = 0$

نظرية: (إختبار المشتقة الاولى)

اذا كان f اقتران متصل على الفترة [a,b] وقابل للاشتقاق على الفترة (a,b) وكانت $(x_1 , f(x_1))$ نقطة حرجة للاقتران f فان:

أ- $f(x_1)$ قيمة عظمى محلية اذا كان

$$f'(x_1) \geq 0 , \forall x \in (a , x_1) , f'(x_1) \leq 0 , \forall x \in (x_1 , b)$$

ب- $f(x_1)$ قيمة صغرى محلية اذا كانت

$$f'(x_1) \leq 0 , \forall x \in (a , x_1) , f'(x_1) \geq 0 , \forall x \in (x_1 , b)$$

وبشكل مبسط يكون للاقتران قيمة عظمى محلية عند x_1 اذا تغير الاقتران عندها من متزايد الى متناقص ويكون للاقتران قيمة صغرى محلية عند x_1 اذا تغير الاقتران عندها من متناقص الى متزايد.

مثال:

جد القيم القصوى للاقتران $f(x) = x^4 - 8x^2$

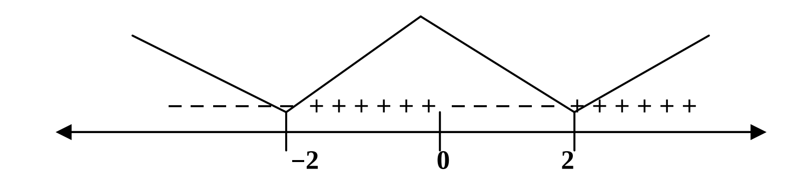
الحل:

نجد أولاً $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$\Longrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$

$\Longrightarrow x = 0 , -2 , 2$

ثم نحدد مجالات التزايد والتناقص للاقتران بالشكل الاتي:



نلاحظ أن الاقتران يتغير من متناقص الى متزايد عند $x = -2$

∴ يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ هي $f(-2) = -16$

وايضا يتغير الاقتران من متناقص الى متزايد عند $x = 2$

∴ يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -16$

ويتغير الاقتران من متزايد الى متناقص عند $x = 0$

وبالتالي يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

مثال:

جد القيم القصوى للاقتران $f(x) = (x + 5)(x^2 - 4)$

الحل: نجد

$$f'(x) = (x^2 - 4) + (x + 5)(2x)$$

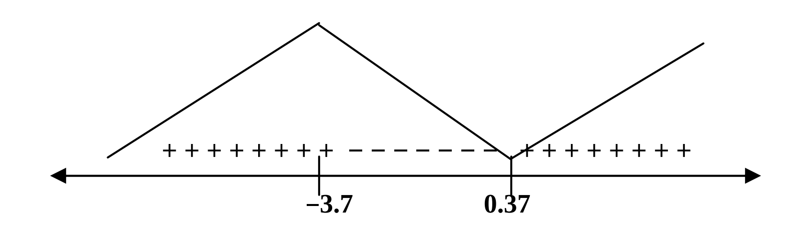
$$= x^2 - 4 + 2x^2 + 10x$$

$$\Longrightarrow 3x^2 + 10x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{148}}{6} = \frac{-10 \pm 12.2}{6}$$

$= 0.37 \; , \; -3.7$

∴ مجالات التزايد والتناقص هي:



∴ يوجد للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = -3.7$ وهي $f(-3.7) = 9.69$

ويوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 0.37$ وهي $f(0.37) = -20.74$

نظرية: (إختبار المشتقة الثانية)

ليكن f اقتران متصل على الفترة [a,b] قابل للاشتقاق مرتين على الفترة (a,b) فاذا كان $f'(x_1) = 0$ حيث $x_1 \in (a,b)$ فإن :

أ- $f(x_1)$ قيمة صغرى محلية اذا كان $f''(x_1) > 0$

ب- $f(x_1)$ قيمة عظمى محلية اذا كان $f''(x_1) < 0$

مثال:

جد القيم العظمى والصغرى للاقتران $f(x) = x^4 - 8x^2$

الحل:

نستخدم المشتقة الثانية في تحديد القيم العظمى والصغرى للاقتران f

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$\Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 , -2 , 2$

نجد المشتقة الثانية

$f''(x) = 12x^2 - 16$

قيمة عظمى محلية $f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow f(0) = 0$

قيمة صغرى محلية $f''(-2) = 32 > 0 \Rightarrow f(-2) = -16$

قيمة صغرى محلية $f''(2) = 32 > 0 \Rightarrow f(2) = -16$

مثال:

اذا كانت $f(x) = \sin x$ معرف على الفترة $[0 , 2\pi]$

فجد القيم العظمى والصغرى للاقتران f

الحل:

$f'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$f''(x) = -\sin x$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ قيمة عظمى

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ قيمة صغرى

وايضاً $f(0)$, $f(2\pi)$ قيم قصوى لانها اطراف الفترة.

مجالات التقعر ونقاط الانعطاف: Concavity and inflection point

نظرية:

ليكن f اقتران متصل وقابل للاشتقاق على الفترة [a,b] فان:

أ- منحنى f مقعر للاعلى في الفترة (a,b) اذا كانت $f''(x) > 0$ لكل قيم x في الفترة (a,b)

ب- منحنى f مقعر للاسفل في الفترة (a,b) اذا كانت $f''(x) < 0$ لكل قيم x في الفترة (a,b)

مثال:

جد مجالات التقعر للاقتران

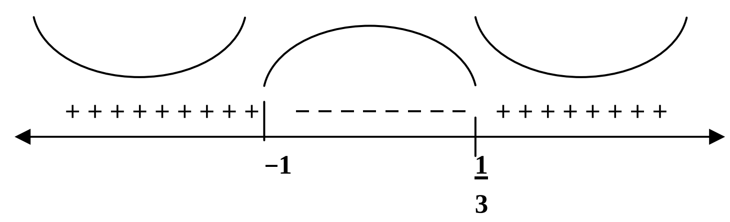
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 15$$

الحل:

$f'(x) = x^3 + x^2 - x$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$(3x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\ ,\ -1$



يكون الاقتران مقعر للاعلى في الفترات

$(-\infty , -1) \cup (\frac{1}{3} , \infty)$

ويكون مقعر للاسفل في الفترة $(-1 , \frac{1}{3})$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^4 - 32x^2 + 12$ ، فجد ما يلي:

أ- مجالات التزايد والتناقص للاقتران

ب- القيم القصوى.

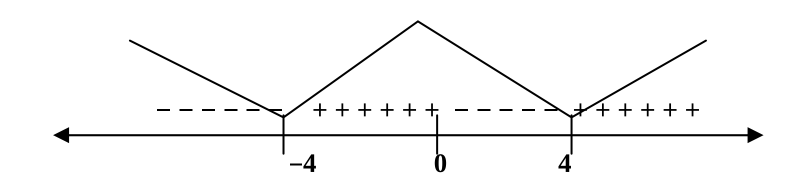
جـ- مجالات التقعر.

الحل:

أ- لايجاد مجالات التزايد والتناقص نجد المشتقة الاولى

$f'(x) = 4x^3 - 64x = 0$

$\Rightarrow 4x(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x = 0 , -4 , 4$



يكون الاقتران متزايد على الفترات $[-4 , 0] \cup [4 , \infty)$

ويكون متناقص في الفترات $(-\infty , -4] \cup [0 , 4]$

ب- أما القيم القصوى فهي:

- قيمة عظمى عند $x = 0$ وهي $f(0) = 12$

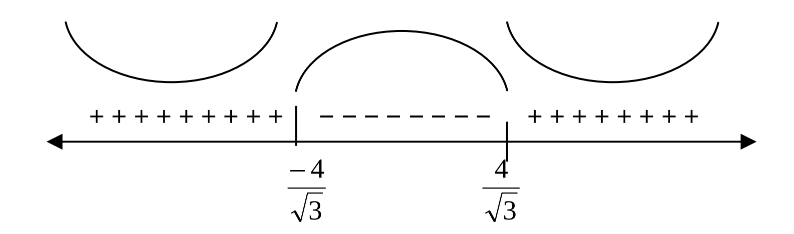
- قيمة صغرى عند $x = -4$ وهي $f(-4) = -244$

- قيمة صغرى عند $x = 4$ وهي $f(4) = -224$

جـ- لايجاد مجالات التقعر نجد المشتقة الثانية وهي:

$f''(x) = 12x^2 - 64$

$$\Rightarrow 3x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{-4}{\sqrt{3}}$$



∴ يكون الاقتران مقعر للاسفل في الفترة $\left[\frac{-4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$

ويكون مقعر للاعلى في الفترات $\left(-\infty,\frac{-4}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{4}{\sqrt{3}},\infty\right)$

تعريف:

اذا كان $f(x)$ متصل عند $x = x_1$ فان:

أ- النقطة $(x_1 , f(x_1))$ تسمى نقطة إنعطاف لمنحنى الاقتران $f(x)$ اذا كان منحنى f يغير اتجاه تقعره عندها.

ب- تسمى الزاوية (θ) التي يصنعها المماس المرسوم من النقطة $(x_1 , f(x_1))$ مع محور السينات الموجب زاوية الانعطاف حيث $\tan\theta = f'(x_1)$ واذا كانت $f'(x_1) = 0$ فان نقطة الانعطاف تسمى نقطة انعطاف افقي ويكون قياس زاوية الانعطاف $= 0$

نظرية:

اذا كانت $(x_1 , f(x_1))$ نقطة انعطاف فان $f''(x_1) = 0$ أو غير موجودة.

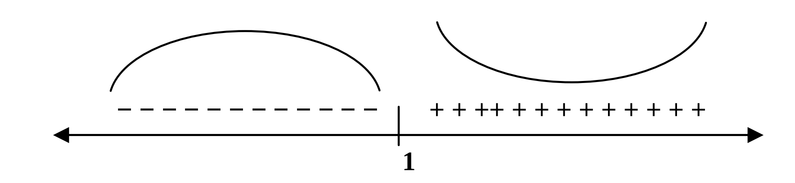
مثال:

جد نقاط وزوايا الانعطاف للاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

الحل:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$



∴ يوجد نقطة انعطاف عند $x = 1$ حيث $f(1) = 0$

∴ نقطة الانعطاف هي $(1, 0)$

للايجاد زاوية الانعطاف

$\tan\theta = f'(1) = -1$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

مثال:

اذا كانت $f(x) = x^3$ فجد:

أ- النقاط الحرجة.

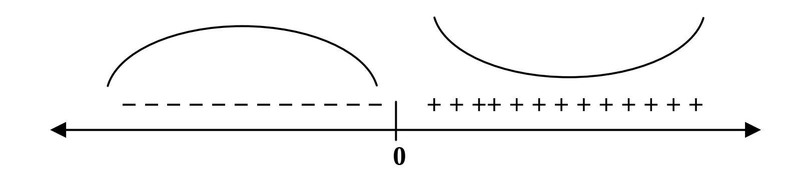
ب- نقاط الانعطاف وزوايا الانعطاف

الحل:

أ- $f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

∴ يوجد نقطة حرجة عند $x = 0$ هي $(0, 0)$

ب- $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$



∴ يوجد عند $x = 0$ نقطة انعطاف هي $(0,0)$

$\tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

∴ نقطة الانعطاف هذه تسمى نقطة انعطاف افقي.

رسم المنحنيات: Curve Sketching

لرسم منحنى الاقتران $f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

1- نجد نقاط تقاطع منحنى $f(x)$ مع محور x وذلك بجعل $f(x) = 0$

2- نجد نقاط تقاطع منحنى $f(x)$ مع محور y وذلك بجعل $x = 0$

3- نجد فترات التزايد والتناقص.

4- نجد النقاط الحرجة والقيم القصوى.

5- نجد فترات التقعر.

6- نجد نقاط الانعطاف.

7- نرسم منحنى الاقتران بناءً على المعلومات السابقة.

مثال:

ارسم منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 3x + 2$

الحل:

1- نجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور x

$f(x) = x^2 - 3x +2 = 0$

$(x -2)\ (x -1) = 0$

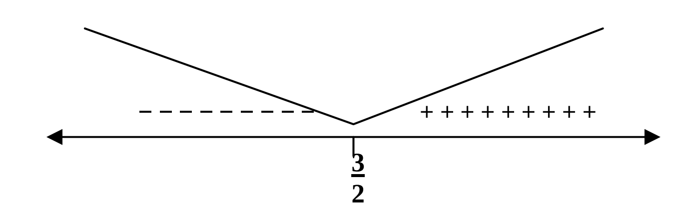
$\Rightarrow x = 1\ ,\ 2$

2- نجد تقاطع المنحنى مع محور y

$y = f(0) = 0 - (3)(0) + 2 = 2$

3- لايجاد فترات التزايد والتناقص

$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$



∴ متناقص في الفترة $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

ومتزايد في الفترة $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

4- يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{3}{2}$ هي $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{4}$

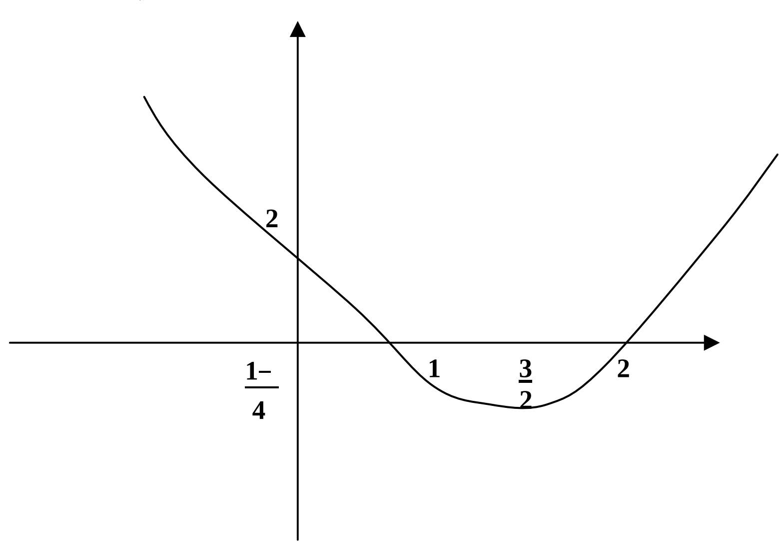
5- لايجاد فترات التقعر

$f''(x) = 2 > 0$

∴ يكون الاقتران مقعر للاعلى على R

6- لا يوجد نقاط انعطاف للاقتران

بتطبيق النقاط السابقة على المستوى يكون منحنى الاقتران بالشكل التالي:



مثال:

ارسم منحنى الاقتران

$f(x) = x^4 - 4x^3$

الحل:

1- نقاط تقاطع المنحنى مع محور x

$x^4 - 4x^3 = 0$

$\Rightarrow x^3 (x - 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 , 4$

2- نقاط تقاطع المنحنى مع محور y

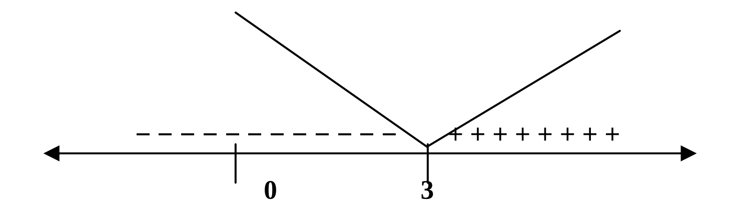
$x = 0 \Rightarrow y = 0$

3- فترات التزايد والتناقص

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 (x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 , 3$



متزايد على الفترو (∞ , 3]

متناقص على الفترة [3 , ∞-)

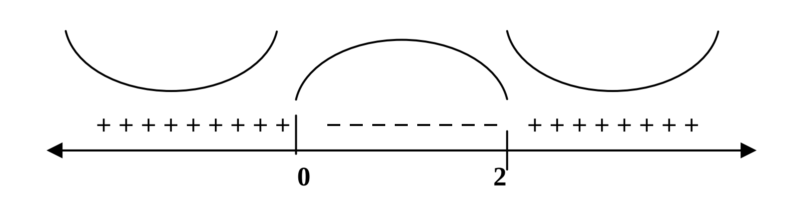
4- يوجد للاقتران قيمة صغرى عند x = 3 هي f(3) = -27

5- فترات التقعر

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$

$\Longrightarrow 12x\,(x-2) = 0$

$\Longrightarrow x = 0\ ,\ 2$

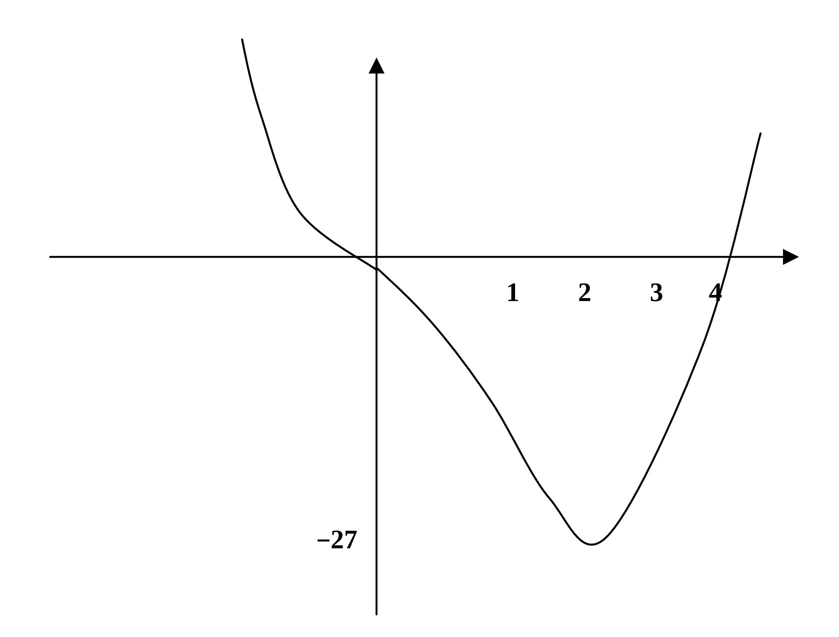


يكون الاقتران مقعر للاعلى في الفترات (∞, 2] U [0 , ∞-)

ويكون مقعر للاسفل في الفترة [0, 2]

6- نقاط الانعطاف هي عند x =0 وعند x =2

وبتطبيق هذه النقاط نحصل على المنحنى التالي:



مسائل عملية على القيم القصوى: Applied extrema Problems

أهم خطوة من خطوات حل المسائل العملية هي تحديد العلاقات بين المتغيرات وجعل العلاقة اكبر (اصغر) ما يمكن بمتغير واحد فقط.

مثال:

مصنع لانتاج العاب الاطفال ينتج x لعبة في اليوم بتكلفة مقدارها $\left(\frac{1}{2}x^2+3x-20\right)$ دينار، ويبيع اللعبة بمبلغ $(9x-6)$ دينار. أوجد عدد الألعاب التي يجب انتاجها حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن وما هو ربحه فيها

الحل:

الربح = سعر البيع - سعر التكلفة

$$w = (9x-6) - \left(\frac{1}{2}x^2+3x-20\right)$$

$$= 9x - 6 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 20$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 14$$

لايجاد اكبر ربح ممكن نجد قيمة عظمى لـ x

$w' = -x + 6 = 0$

$\Rightarrow x = 6$

$w'' = -1 < 0$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى عند $x = 6$

$\therefore$ عدد القطع الواجب بيعها حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن هي ستة ألعاب في اليوم

ويكون ربحه في هذه الحالة

$$w = -\frac{1}{2}(6)2 + (6)(6) + 14$$

$$= -18 + 36 + 14$$

$$= 32 \text{ J.D}$$

مثال:

جد أقرب نقطة على منحنى $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ للنقطة $(4 , 0)$

الحل:

نفرض النقطة على منحنى f هي (x , y)

$\therefore$ من قانون المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

وبتعويض قيمة $y = \sqrt{x^2 - 3}$ تصبح

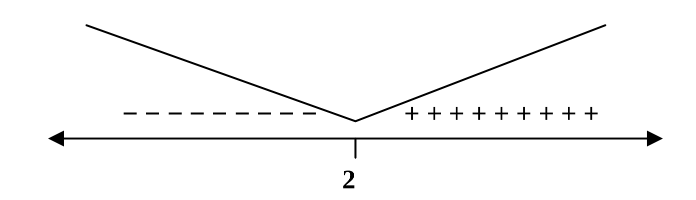
$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (x^2 - 3)} = \left((x-4)^2 + (x^2 - 3)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d' = \frac{1}{2}\left((x-4)^2 + (x^2-3)\right)^{-\frac{1}{2}}(2(x-4)+2x)$$

$$= \frac{4x-8}{2\sqrt{(x-4)^2 + x^2 - 3}} = 0$$

$\therefore 4x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 2$

لمعرفة ما اذا كانت هذه النقطة قيمة عظمى أم صغرى نجد مجالات التزايد والتناقص لتحديد اشارة الاقتران نأخذ البسط فقط وذلك لأن المقام دائماً موجب (الجذر التربيعي)



من المخطط أعلاه نلاحظ أنه عند $x = 2$ يوجد قيمة صغرى

$\therefore$ تكون النقطة هي $(2, f(2)) = (2, 1)$

مثال:

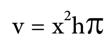
جد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم والتي يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم نصف قطره 5cm وارتفاعه 10cm

الحل:

لنأخذ مقطع عرضي للمخروط والاسطوانة كما في الشكل

اكبر حجم ممكن للاسطوانة التي نصف قطرها x

وارتفاعها h هو:



$v = x^2 h\pi$

ولايجاد العلاقة بين x و h نأخذ المثلثين

a b i , d b f

يتشابه المثلثان في ثلاثة زوايا

ومن التشابه ينتج أن

$$\frac{df}{ai} = \frac{bf}{bi}$$

لكن

$$df = h \;,\; ai = 10cm \;,\; bf = 5-x \;,\; bi = 5 \Rightarrow \frac{h}{10} = \frac{5-x}{5} \Rightarrow h = 10 - 2x$$

$$\therefore v = \pi x^2 (10 - 2x)$$

$$= \pi (10x^2 - 2x^3)$$

$$v' = \pi (20x - 6x^2)$$

$$2x (10 - 3x) = 0$$

$$x = 0 \;,\; x = \frac{10}{3}$$

$$v'' = \pi (20 - 12x)$$

$$v'' (0) = 20\pi > 0$$

قيمة صغرى

$$v''\left(\frac{10}{3}\right)=\pi\left(20-(2)\left(\frac{10}{3}\right)\right)=-20\pi<0$$

قيمة عظمى

$\therefore$ يكون اكبر حجم عندما $x = \frac{10}{3}$ نصف القطر

الارتفاع $h = 10-2x = 10-2\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{10}{3}cm$

مثال:

صفيحة من الورقة مساحتها $32cm^2$ يراد طباعة اعلان عليها فاذا كان عرض كل من الهامش في رأس الورق وأسفلها 1cm، وفي كل من الجانبين $\frac{1}{2}$ cm ، أوجد بعدي الورقة بحيث تكون مساحة الطباعة اكبر ما يمكن.

الحل:

نفرض أن طول الورقة x وعرضها y

مساحة الورقة $xy = 32$

مساحة الطباعة $(x-2)(y-1)$

لكن $xy = 32$

$$\therefore y=\frac{32}{x}$$

$$\therefore A=(x-2)\left(\frac{32}{x}-1\right)$$

y

x

1cm

$\frac{1}{2}$cm

$$= 32 - \frac{64}{x} - x + 2$$

$$= 34 - x - \frac{64}{x}$$

$$A' = -1 + \frac{64}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{64}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 64$$

$\therefore\ x = \pm 8$ لكن تستثنى الاشارة السالبة لان البعد لا يكون بالسالب

$$\therefore\ x = 8$$

$$A'' = \frac{-128}{x^3}$$

$$\Rightarrow A''(8) = \frac{-128}{(8)^2} < 0$$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى عند $x = 8$

وتكون ابعاد الورقة التي تعطي اكبر مساحة طباعة ممكنة هي

$$x = 8cm\ ,\ y = \frac{32}{8} = 4cm$$

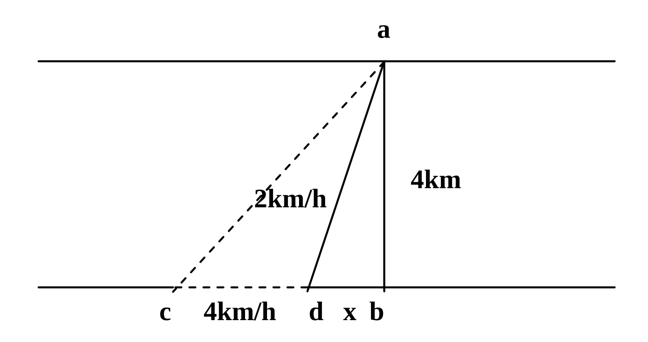
مثال:

يقف رجل على احد ضفتي نهر عند النقطة a في مواجهة النقطة b على الضفة الاخرى علماً بان ضفتي النهر متوازيتان ويريد أن يصل للنقطة (c) على الضفة الاخرى والتي تبعد 8km عن b فاذا كان عليه ان يسير في قارب الى (d) على الضفة الاخرى بسرعة 2km/h ثم يسيرعلى قدميه الى (c) بسرعة قدرها 4km/h. ما هو بعد النقطة (d) عن b ليصل باسرع وقت ممكن علماً بان عرض النهر 4km .

الحل:

اذا فرضنا أن بعد النقطة (d) عن النقطة (b) هو x km فان حسب نظرية فيثاغورس البعد بين a ,d هو

$$ad = \sqrt{x^2 + 16}$$



ومن قانون السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ ، يكون الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

وبالتالي يكون الزمن المقطوع من (a) الى (d) هو = $t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{2}$

أما الزمن الذي يحتاجه الرجل لقطع المسافة c d فهو = $t = \frac{8-x}{4}$

$\therefore$ الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل ليصل من a الى c هو :

$$t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{2} + \frac{8-x}{4}$$

لايجاد أقل زمن ممكن نشتق الزمن

$$t' = \frac{x}{2\sqrt{x^2+16}} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{4}$$ بالضرب التبادلي

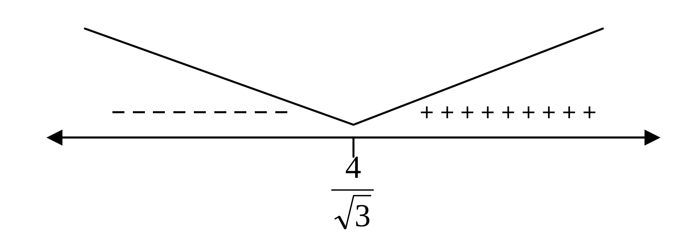
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+16} = 4x \Rightarrow \sqrt{x^2+16} = 2x$$

بتربيع الطرفين

$$\Rightarrow x^2 + 16 = 4x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

تستثنى القيمة السالبة



$\frac{4}{\sqrt{3}}$

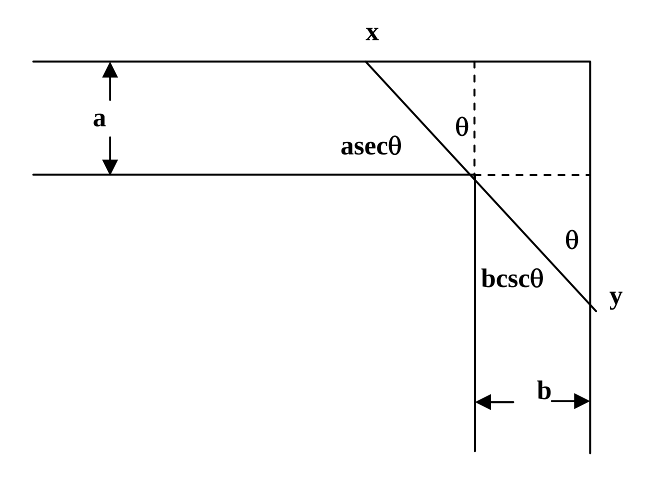
∴ يوجد للاقتران قيمة صغرى عند $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ لتعطي اسرع وقت ممكن

ويكون البعد بين النقطة (b) والنقطة (d) هو $\frac{4}{\sqrt{3}}$ km

مثال:

جد أطول سلم يمكن حمله في زاوية ممر أبعاده موضحه بالشكل التالي علماً بان السلم كان محمولاً موازياً للأرض

حيث a = b



الحل:

أطول سلم = أقصر قطعة مستقيمة x , y والتي تمس الحائطين الخارجيين

$xy = L = a\sec\theta + b\csc\theta$

والمطلوب ايجاد قيمة صغرى

$L' = a\sec\theta\tan\theta - b\csc\theta\cot\theta = 0$

حيث أن a = b فإن

$a\sec\theta\tan\theta - a\csc\theta\cot\theta = 0$

$\Rightarrow a\sec\theta\tan\theta = a\csc\theta\cot\theta$

$\Rightarrow \dfrac{\sec\theta\tan\theta}{\csc\theta\cot\theta} = 1$

$\Rightarrow \tan^3\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$L'' = \sec\theta\tan^2\theta + \sec^3\theta - (-\csc\theta\cot^2\theta - \csc^3)$

$= \sec\theta\tan^2\theta + \sec^3\theta + \csc\theta\cot^2\theta + \csc^3\theta$

$= \left(\sqrt{2}\right)(1)^2 + (2)\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)(1)^2 + 2\sqrt{2} > 0$

∴ يوجد قيمة صغرى عند $\theta = \frac{\pi}{4}$

وبتعويضها في L يكون اطول سلم هو:

$$L = a\sqrt{2} + a\sqrt{2} = a2\sqrt{2}$$

نظريتا رول والقيمة المتوسطة:

Rolle's Theorem and Mean – Value Theorem

نظرية رول: Rolle's Theorem

اذا كان الاقتران f متصل على الفترة المغلقة [a,b] وقابل للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) وكان f(a) = f(b) فان يوجد على الاقل عدد واحد مثل c في الفترة (a,b) بحيث $f'(c) = 0$

البرهان:

يأخذ الاقتران f(x) أحد الاشكال الثلاث التالية:

أ- f(x) = f(a) لكل x ∈ (a,b) وفي هذه الحالة يكون الاقتران ثابت وتكون $f'(x)=0$ لكل قيم x

ب- f(x) > f(a) لاحدى قيم x في (a,b) وفي هذه الحالة يكون للاقتران قيمة عظمى ولتكن f(c) وهذا يتضمن أن $f'(c) = 0$.

جـ- f(x) < f(a) لاحدى قيم x في (a,b) وفي هذه الحالة يكون قيمة صغرى للاقتران ولتكن f(c) وهذا يتضمن أن $f'(c) = 0$

مثال:

بين فيما اذا كان $f(x) = x^2-3x$ يحقق نظرية رول على الفترة [-1,4] واذا كان فجد قيمة c

الحل:

f(x) كثير حدود لذا فهو متصل وقابل للاشتقاق

$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 4$

$f(4) = (4)^2 - (4)(3) = 4$

$\therefore f(-1) = f(4)$

∴ f يحقق نظرية رول

ولايجاد قيمة c نجد

$f'(x) = 2x - 3$

$\Rightarrow f'(c) = 2c - 3 = 0$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

مثال:

بين فيما اذا كان الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

يحقق نظرية رول على الفترة [0,2]

الحل:

في البداية نبحث في اتصال الاقتران ونأخذ النهاية من اليمين ومن اليسار

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - x = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

∴ الاقتران متصل على الفترة [0,3]

ثم نجد المشتقة من اليمين ومن اليسار

$f'_{+}(x) = 2$

$f'_{-}(x) = -1$

∴ المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار

وبالتالي يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق

∴ f لا يحقق نظرية رول

نظرية القيمة المتوسطة: Mean – Value Theorem

اذا كان f اقتران متصل على الفترة [a,b] وقابل للاشتقاق على الفـترة المفتوحـة (a,b) فانـه يوجـد على الاقل عدد واحد مثل (c) بحيث

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ملاحظة: تعتبر نظرية القيمة المتوسطة تعميم لنظرية رول

البرهان:

نعرف الاقتران التالي:

$$L(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

بما أن f متصل على الفترة [a,b] وقابل للاشتقاق على الفترة (a,b)

فان L(x) يكون متصل على الفترة [a,b] وقابل للاشتقاق على الفترة (a,b)

واذا عوضنا في الاقتران L(x) في قيمة a وقيمة b نجد أن

$L(a) = 0 = L(b)$

∴ L(x) يحقق شروط نظرية رول

وبالتالي يوجد عدد واحد على الاقل مثل (c) بحيث $L'(c) = 0$

$$L'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$L'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{b - a}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^3 - 5x - 5$ أثبت أن f(x) يحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [1,4] ثم جد قيمة c

الحل:

بما أن f كثير حدود اذن فهو متصل وقابل للاشتقاق على أي فترة

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f'(c) = 3c^2 - 5$$

$$f(4) = (4)^3 - 5(4) - 5 = 39$$

$$f(1) = (1)^3 - 5(1) - 5 = -9$$

$$f(4) - f(1) = 39 - (-9) = 48$$

$$f'(c) = 3c^2 - 5 = \frac{48}{4-1} = 16$$

$$\Rightarrow 3c^2 = 16 + 5 = 21$$

$$\Rightarrow c^2 = 7$$

$$\therefore c = \pm\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{7}$$

قيمة c التي تحقق النظرية.

مثال:

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة جد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{5}$

الحل:

نفرض $f(x) = \sqrt{x}$ وهو متصل وقابل للاشتقاق على R^+ نختار أقرب مربع كامل للعدد (5) وهو العدد (4) ومعرف على الفترة [4,5] وفي هذه الفترة الاقتران يحقق نظرية القيمة المتوسطة

$$\therefore f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{5 - 4}$$

نعوض بدل c بالمربع الكامل

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{5 - 4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5} - 2}{1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$$

تمـــــارين

1- للاقتران $\frac{1}{2} f(x) = 2x^3 - x^2 + 15$ جد

أ- فترات التزايد والتناقص

ب- القيم العظمى والصغرى

جـ-مجالات التقعر ونقاط الانعطاف

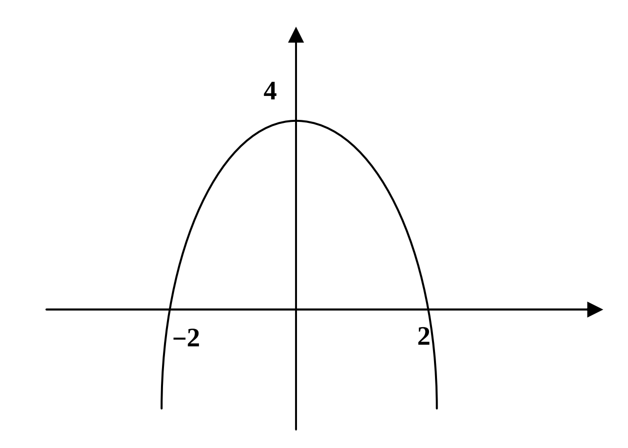
2- اذا كان الاقتران $f(x) = x + \cos x$ معرف على الفترة $[0 , 4\pi]$ جد

أ- فترات التزايد والتناقص

ب- القيم العظمى والصغرى والنقاط الحرجة

جـ- مجالات التقعر ونقاط الانعطاف

3- الشكل التالي يمثل منحنى $f'(x)$



جد :

أ- مجالات التزايد والتناقص

ب- القيم العظمى والصغرى

جـ- مجالات التقعر

د- ارسم منحنى تقريبي للاقتران

4- اذا كان للاقتران:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 12 & x \geq 2 \\ a & x < 2 \end{cases}$$

قيمة صغرى عند x=1 هي (9) فجد قيمة a

5- ارسم منحنيات الاقترانات التالية:

a) f(x) = $\sqrt{x+12} - 4x$

b) f(x) = $x + |2x - 3|$

c) f(x) = $\cos x + \sin x$, $[-2\pi , 2\pi]$

d) f(x) = $\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

6- ارسم منحنى الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

7- اذا كان للاقتران $f(x) = x - ax^2$ قيمة عظمى محلية عند $x = \dfrac{-1}{4}$

فجد قيمة a

8- اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} [x] & 0 < x < 4 \\ |x-3| & x \geq 4 \end{cases}$$

معرف على الفترة [1,5] فجد القيم القصوى للاقتران ان وجدت

9- جد قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثالثة الذي يمر منحناه بالنقطة (1,5) ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (2,1) هي 3x+y =7

10- ارسم منحنى تقريبي للاقتران $f(x) : [-3,3] \rightarrow R$ حيث $f(1) = 0$

$f(-1)$ قيمة صغرى محلية، $f''(x) > 0$ عندما $x < -\frac{1}{2}$

$f''(x) < 0$ عندما $x > -\frac{1}{2}$

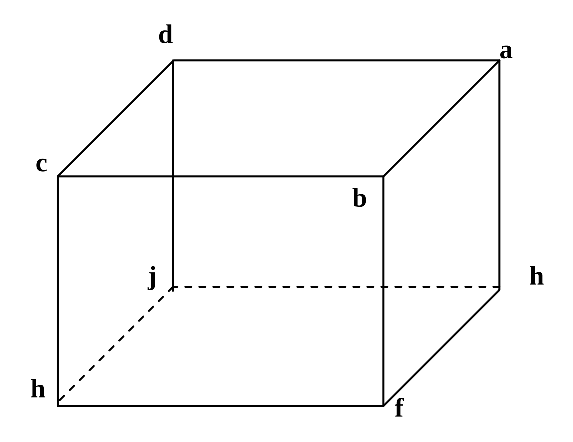
11- جد أقل كمية من الصفيح اللازم لصناعة علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها $81\ ft^3$

12- صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها $50cm^2$ يراد طباعة اعلان عليها فاذا كان عرض الهامش من أعلى واسفل الورق 2cm ومن الجانبين 1cm فجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن

13- بين أن اكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{4}{9}$ حجم المخروط

14- اذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه 40cm دورة كاملة حول قاعدته، فما اكبر حجم ممكن للجسم الناتج عن هذا الدوران؟

15- الشكل التالي يمثل مكعب طول ضلعه 20cm انطلق عليه جسيمان في نفس اللحظة الاول من الرأس a (على الحرف ad) باتجاه الرأس (d) وبسرعة 4cm/s والثاني من الرأس h باتجاه الرأس f على الحرف (hc) بسرعة 3cm/s أوجد معدل ابتعاد الجسيمين عن بعضهما البعض بعد مرور 4 ثواني من لحظة انطلاقهما.



16- جد النقطة على المنحنى $f(x) = \sin x$ بحيث يكون بعدها عن النقطة $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ أقرب ما يمكن.

17- اثبت أن اكبر مساحة لمستطيل محيطة L هـو عندما يكون مربعاً.

18- اذا كانت المسافة التي يقطعها جسم متحرك بعد t ثانية معطاه بالعلاقة $d=16+4t^2-t^4$ حيث $t \geq 0$ ، ما هو الزمن اللازم حتى تكون سرعته اكبر ما يمكن، تسارعه اكبر ما يمكن.

19- مثلث مساحته $16cm^2$ ساقاه x,y يحصران بينهما زاوية 30° جد أقل كمية للمقدار $40x + 10y$

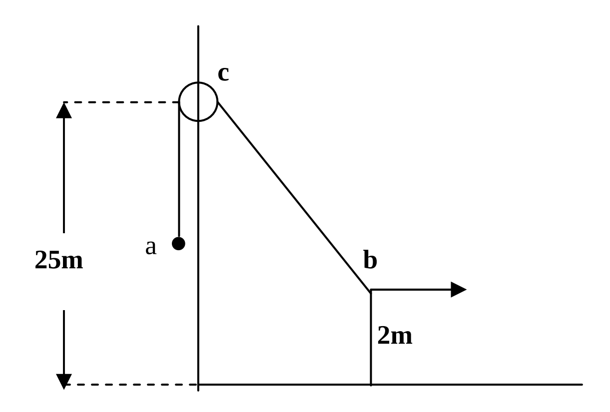
20- مستطيل كان طوله في لحظه ما ضعف عرضه الذي يبلغ 6cm بدأ طوله بالتناقص بمعدل 1.5 cm/s وعرضه بالتزايد بمعدل 0.5cm/s جد معدل التغير في مساحة المستطيل بعد 4 ثواني من تلك اللحظة.

21- تتحرك نقطة على المنحنى $y^2 = 5 - x^2$ جد احداثيات النقطة التي يكون عندها معدل التغير في الاحداثي السيني 2cm/s ومعدل التغير في الاحداثي الصادي 1cm/s

22- بالون على ارتفاع 100m يصعد للاعلى فوق أرض مستوية بسرعة 200m/s تمر من تحته سيارة تسير بسرعة 60km/h جد سرعة تغير المسافة بين البالون والسيارة بعد دقيقتين.

23- يتساقط رمل بمعدل 3cm/s ليصنع شكل مخروطي نصف قطر قاعدته يساوي دائما ضعف ارتفاعه. جد معدل التغير في الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع 20cm .

24- حبل طوله 45m يمر فوق بكرة ثابتة (c) وارتفاعها 25m فوق سطح الارض ومعلق باحد طرفيه a كتلة m والطرف الآخر b يسحبه رجل على ارتفاع ثابت من سطح الارض قدره 2m كما في الشكل فاذا كان الرجل يبتعد عن مستوى البكرة عند لحظة ما بسرعة قدره 6m/s وكان بعده عن هذا المستوى 15m جد سرعة صعود الكتلة m.



25- اثبت أن f(x) في كل من الاقترانات التالية يحقق نظرية رول على الفترة المبينة ازاء كل منها، ثم جد قيمة c

a) $f(x) = 3x^2 - 12x - 11$ [0,4]

b) $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$ [-7,1]

c) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ [-3,3]

26- اثبت أن f(x) في كل من الاقترانات التالية يحق نظرية القيمة المتوسـطة عـلى الفـترة المبينـة أزاء كـل منهم ثم جد قيمة c

a) $f(x) = x^3 + 1$ [-2,4]

b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ [1,3]

c) $f(x) = x + 4$ [1,4]

27- جد قيمة تقريبية لكل من المقدارين $\frac{1}{9}, \sqrt[3]{7}$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة.

28- اذا كان h(x) , f(x) اقترانين معرفين ومتصلين على الفترة [5,8] وقابلين للاشتقاق على الفترة (5,8) وكان $f(5) = h(5)$، $f(8) = h(8)$ فبرهن أنه يوجد عدد مثل $c \in (5,8)$ بحيث أن $f'(c) = h'(c)$

(ارشاد: افرض $k(x) = f(x) - h(x)$)

29- جد الاحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

والتـــــي يكـــــون عنـــــدها المـــــماس موازيـــــاً للقـــــاطع الواصـــــل بـــــين النقطتـــــين (0, f(0)) , (4, f(4)) .

30- باستخدام نظرية رول أثبت أن المعادلة $6x^5 - 4x + 1 = 0$ لها جـذر حقيقـي يقـع ضـمن الفـترة (0 , 1) حيث

$$\frac{d}{dx}(x^6 - 2x^2 + x) = 6x^5 - 4x + 1$$



التكــامل

Integration



الوحدة الخامسة

التكــامل

Integration

التكامل غير المحدود وعكس المشتقة

Antiderivative and the indefinite integral

تعريف:

المعادلة على الصور $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ تسمى معادلة تفاضلية

مثال:

جد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$

الحل:

في هذه المعادلة نقول ما هو الاقتران الـذي مشـتقة (2x) ومـن معرفتنـا بالتفاضـل نسـتطيع أن نقول أن هذا الاقتران هو $f(x) = x^2$ ومشتقة هذا الاقتران تعطـي المعادلـة التفاضـلة ولكـن اذا كـان هنـاك عدد ثابت مضافا إلى x^2 فإن المشتقة تكون أيضا 2x

مثلا $f(x) = x^2 + 1$ مشتقة 2x وأيضاً $f(x) = x^2 + 25$ مشتقة (2x)

$\therefore$ بشكل عام فإن $f(x) = x^2 + c$ حيث c عدد ثابت، هو حل المعادلة التفاضلية

تعريف:

إذا كان f اقترانا متصلاً على [a,b] فإن الاقتران F يدعى اقترانا بدائيا للاقتران f إذا كان

$F'(x) = f(x)\ ,\ \forall\ x \in (a,b)$

ويسمى الاقتران F(x) تكامل للاقتران f(x) بالنسبة للمتغير x وتكتب على الصورة

$\int f(x)\,dx = F(x) + c\ ,\ c \in R$

مثال:

جد الاقتران البدائي للاقتران $f(x) = 3x^2$

الحل:

من التعريف نقول أن $F'(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow F(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

وجدنا الحل من خلال معرفتنا بمادة التفاضل وأن مشتقة x^3 هي $3x^2$ ومن هنا نرى أن التكامل هو عكس للمشتقة ويسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل غير المحدود ولسهولة ايجاد التكامل نتعرف على القواعد التالية:

1) $\int k\,dx = kx + c\ ,\ k \in R$

مثال:

1) $\int 5\,dx = 5x + c$

2) $\int \pi\,dx = \pi x + c$

2) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ ,\ n \in R / \{-1\}$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int x^2\, dx$

2) $\int x^5\, dx$

3) $\int \sqrt{x}\, dx$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$

الحل:

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

2) $\int x^5\, dx = \frac{x^6}{6} + c$

3) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{-3}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

3) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx\ ,\ \ k \in R$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int 3x^2\, dx$

2) $\int 5x^{-6}\, dx$

الحل:

1) $\int 3x^2 dx = (3)\left(\frac{x^3}{3}\right) + c = x^3 + c$

2) $\int 5x^{-6} dx = \frac{5x^{-5}}{-5} + c = \frac{-1}{x^5} + c$

4) $\int f(x) \pm h(x) dx = \int f(x) dx \pm \int h(x) dx$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int 3x^2 + 2x + 5dx$

2) $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx$

3) $\int \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 1dx$

الحل:

1) $\int 3x^2 + 2x + 5dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 5x + c$

$= x^3 + x^2 + 5x + c$

2) $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \int 3(x)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 6\sqrt{x} + c$

3) $\int \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 1dx = \int 4x^{-3} + 3x^{-2} + 1dx$

$= \frac{4x^{-2}}{-2} + \frac{3x^{-1}}{-1} + x + c$

$= -2x^{-2} - 3x^{-1} + x + c$

$= \frac{-2}{x^2} - \frac{3}{x} + c$

تكامل الاقترانات المثلثية : Integration of trigonometric Function

من خلال التفاضل نعلم أن اذا كان $f(x) = \sin x$ فان $f'(x) = \cos x$

$\therefore$ 1) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

ونقيس على ذلك بقية الاقترانات فيكون:

2) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

3) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

4) $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

5) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

6) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

مثال:

جد التكاملات التالية :

1) $\int x^2 + \sin x \, dx$

2) $\int \cos x + 3\sec^2 x \, dx$

3) $\int 2 \sec x \tan x + 6x \, dx$

4) $\int \sec x \tan x - \csc x \cot x \, dx$

الحل:

1) $\int x^2 + \sin x \, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$

2) $\int \cos x + 3\sec^2 x \, dx = \sin x + 3\tan x + c$

3) $\int 2 \sec x \tan x + 6x \, dx = 2\sec x + \frac{6x^2}{2} + c$

$= 2 \sec x + 3x^2 + c$

4) $\int \sec x \tan x - \csc x \cot x \, dx = \sec x + \csc x + c$

التكامل بالتعويض: Integration by Substitution

بعض التكاملات لا يمكن اجراءها مباشرة حيث يجب أن نحولها إلى صيغة اسهل لنتمكن من إجراء التكامل وذلك عن طريق التعويض.

مثال: جد

الحل: نفرض

$$\int 2x (x^2 + 1)^3 \, dx$$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$\therefore \int 2x(x^2+1)^3 \, dx = \int 2xy^3 \frac{dy}{2x} = \int y^3 dy$

$$= \frac{y^4}{4} + c = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + c$$

مثال: جد

$$\int x \sin x^2 \, dx$$

الحل: نفرض

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\therefore \int x \sin x^2 \, dx = \int x \sin y \, \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int \sin y \, dy$$

$$= -\frac{1}{2} \cos y + c$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

مثال: جد

$$\int 3 \cos^2 x \sin x \, dx$$

الحل:

$$y = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{dy}{-\sin x}$$

$$\therefore \int 3 \cos^2 x \sin x \, dx = \int 3y^2 \sin x \,. \, \frac{dy}{-\sin x}$$

$$= -3 \int y^2 \, dy$$

$$= -3 \, \frac{y^3}{3} + c$$

$$= -y^3 + c$$

$$= -\cos^3 x + c$$

مثال : جد

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} \, dx$$

الحل:

$$y = x^2 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\, dx = \int \frac{x}{3\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{3}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4} y^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2} + c$$

مثال:

جد

$$\int (2x-2)\sqrt{3x^2-6x+10}\, dx$$

الحل:

$$y = 3x^2 - 6x + 10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x - 6 = 3(2x - 2)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{3(2x-2)}$$

$$\therefore \int (2x-2)\sqrt{3x^2-6x+10}\ dx$$

$$= \int (2x-2)\frac{\sqrt{y}dy}{3(2x-2)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{y}dy = \frac{1}{3}\int (y)^{\frac{1}{2}}\ dy$$

$$= \frac{1}{3}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

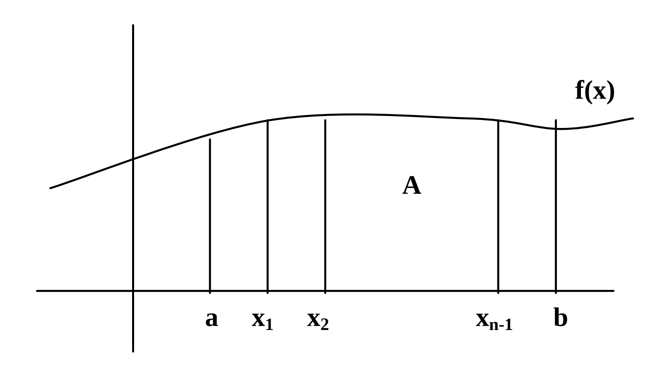
$$= \frac{2}{9}y^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}\left(3x^2-6x+10\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

المساحة : Area

لايجاد مساحة شكل منتظم نستخدم العلاقة الخاصة به ولكن اذا كانت المساحة المحصـورة بـين منحنى اقتران ومحور السينات والمستقيمين x = a

x = b كما في الشكل التالي:



واردنـــــا إيجـــاد المســــاحة (A) فإننــــا نقســــم المســــاحة إلى مســــتطيلات طوليــــة متســــاوية العـــرض عـــددها (n) وعـــرض كـــل منهـــا $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ثـــم نجـــد مساحة كل مستطيل من هذه المستطيلات فتكون مساحة المستطيل الأول = الطول × العـرض $\frac{b-a}{n} \times$ $a_1=f(a)$ والمســـــــتطيل الثــــــاني $f(x_1) \times \frac{b-a}{n} = a_2$ أمــــــا الثالــــــث $a_3 = f(x_2)\ \frac{b-a}{n}$ وهكذا الى أن نصل الى آخر مستطيل حيث تكون مساحته $a_n = f(x_{n-1})\ \frac{b-a}{n}$

ومجموع مساحات هذه المستطيلات تعطي قيمة تقريبية للمساحة تحت المنحنى حيث

$$A = f(x_0)\ \frac{b-a}{n} + f(x_1)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(x_{n-1})\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r)$$

حيــــث يســــمى المقــــدار $\frac{b-a}{n}$ فــــترة جزئيــــة مــــن الفــــترة [a.,b] والنقــــاط $\{a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, b)$ تسمى تجزئة للفترة

مثال :

جد المساحة التقريبية تحت المنحنى $f(x) = x^2-2$ المحصورة بين المستقيمين $x =0$, $x =1$ ومحـور x

الحل:

نفرض $n = 5 \Rightarrow \frac{b-a}{n} = \frac{1}{5}$ وتكون التجزئة الناتجة هي:

$$\left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

$$\therefore A = \frac{1}{5}\sum_{r=0}^{4} f(x_r) = \frac{1}{5}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\ (-2 + -1.96 + 1.84 + -1.64 + (-1.36)$$

$$= |-1.76| = 1.76$$

أخذنا القيمة المطلقة لأن المساحة لا يمكن أن تكون سالبة

هذه المساحة مساحة تقريبية للمنحنى، وكلما كانت عدد المستطيلات اكثر كلما كانت هذه المساحة أقرب الى المساحة الصحيحة واذا اردنا ايجاد المساحة الدقيقة نأخذ عدد لانهائي من المستطيلات حيث تكون المساحة هي:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n} f(x_r)$$

حيث

$$x_r = a + \frac{b-a}{n} * r$$

فمثلاً لو اردنا إيجاد المساحة الدقيقة للمثال السابق تكون المساحة

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{r=0}^{n} x_r^2 - 2$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n}\left(0 + \frac{1}{n} r\right)^2 - 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n^2} r^2 - 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n^2} r^2 - 2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - 2$$

$$= \frac{1}{3} -2 = |-1.67|$$

= 1.67 u.a

مثال:

جد المساحة تحت منحنى $f(x) = 3x - 4$ ومحصورة بين $x = 1$ ، $x = 2$

الحل:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1}{n} \sum_{r=0}^{n} 3x_r - 4$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} 3\left(1 + \frac{1}{n} r\right) - 4$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{r=0}^{n} 3 + \frac{3}{n} r - 4\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{r=0}^{n} \frac{3}{n} r - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{3}{n}\sum_{r=0}^{n} r - \sum_{r=0}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{3}{n} \frac{n(n+1)}{2} - n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n+3}{2n}-1\right]$$

$$= \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\ \text{u.a}$$

مثال:

جد المساحة تحت المنحنى $f(x) = 4 - x^2$ والمحددة بالمستقيمين $x=1$، $x=3$

الحل:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n} f(x_r)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n} 4-x_r^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n} 4-\left(1+\frac{2}{n}r\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\sum_{r=0}^{n} 4-\left(1+\frac{4}{n}r+\frac{4}{n^2}r^2\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\sum_{r=0}^{n} 3-\frac{4}{n}\sum_{r=0}^{n} r-\frac{4}{n^2}\sum_{r=0}^{n} r^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[3n-\frac{4}{n}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} 6-\frac{8(n+1)}{2n}-\frac{8(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= 6 - \frac{8}{2}-\frac{16}{6}$$

$$= |-0.67| = 0.67\ \text{u.a.}$$

The definite integral : التكامل المحدود

تعريف:

إذا كان $f : [a,b] \rightarrow R$ اقترانا محدوداً فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\rightarrow 0} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f(x_r)$$

ويكون الاقتران قابل للتكامل إذا كانت النهاية موجودة.

نلاحظ من خلال تعريفنا للتكامل المحدود أن تكامل الاقتران f(x) من x = a الى x=b يعطي نفس تعريف المساحة المحصورة بين الاقتران ومحور x-axis والمستقيمين x = b , x = a وسنوضح ذلك في الوحدة اللاحقة.

مثال: جد

$$\int_a^b c dx \quad , \quad c \in R$$

الحل:

$$\int_a^b c dx = \lim_{n\rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} c$$

$$= \lim_{n\rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \times cn$$

$$= (b-a)\, c$$

مثال: جد

$$\int_a^b x dx$$

الحل:

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} x_r$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} a + \frac{b-a}{n} r$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left[an + \frac{b-a}{n} . \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a)a + (b-a)^2 \frac{(n+1)}{2n}$$

$$= (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right)$$

$$= (b-a) \left(\frac{b+a}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

نظرية:

إذا كان f اقتران معرف على [a, b] بحيث $f(x) = x^n$, $n \in N$ فإن:

$$\int_a^b x^n\,dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int_0^1 x^2 dx$

2) $\int_2^4 x^5 dx$

الحل:

1) $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

2) $\int_2^4 x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right]_2^4 = \frac{4^6 - 2^6}{6} = 2^6 \frac{(2^6 - 1)}{6}$

$= \frac{64 \times 63}{6} = 672$

خواص التكامل المحدود:

1) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad , \quad \mathbf{c \in R}$

مثال: جد

$\int_0^2 4x^3 dx$

الحل:

$$\int_0^2 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4}\Big]_0^2 = 2^4 - 0^4 = 16$$

$$\text{2)}\quad \int_a^b \left(f(x) \pm h(x)\right)dx = \int_a^b \left(f(x)dx\right) \pm \int_a^b \left(h(x)dx\right)$$

مثال: جد

$$\int_1^2 3x^2 - 2x + 4dx$$

الحل:

$$\int_1^2 3x^2 - 2x + 4dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x\Big]_1^2$$

$$= x^3 - x^2 + 4x\Big]_1^2$$

$$= (2^3 - 2^2 + (4)(2)) - (1^3 - 1^2 + (4)(1))$$

$$= 12 - 4 = 8$$

$$\text{3)}\quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

تسمى هذه الخاصية خاصية الاضافة

مثال: جد

$$\int_{-1}^1 |2x - 1|dx$$

الحل: نعيد تعريف القيمة المطلقة

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & x > \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} |2x-1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 1-2x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x-1 dx$$

$$= x - x^2 \Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left((-1)-(-1)^2\right)\right] + \left[\left(1^2 - 1\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 2\right) + \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 2.5$$

4) $\int_{a}^{a} f(x) dx = 0$

مثال:

$$\int_{2}^{2} \sqrt{x} + \frac{5}{x} dx = 0$$

5) $\int_{a}^{b} f(x) dx = -\int_{b}^{a} f(x) dx$

أمثلة على التكامل المحدود:

مثال: جد

$$\int_{1}^{4} x + \sqrt{x}dx$$

الحل:

$$\int_{1}^{4} x + \sqrt{x}dx = \int_{1}^{4} x + x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{1}^{4}$$

$$= \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1}{2}^2\right) + \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \left(8 - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}(8 - 1)$$

$$= 8 - \frac{1}{2} + \frac{14}{3}$$

$$= \frac{73}{6}$$

مثال: جد

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1$$

مثال : جد

$$\int_0^2 x(x^2-4)^3 dx$$

الحل:

نكامل بالتعويض حيث نفرض $y = x^2 - 4$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$x = 2 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = -4$

$$\therefore \int_0^2 x(x^2-4)^3 dx = \int_{-4}^0 xy^3 \frac{dy}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^0 y^3 dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{-4}^0 = \frac{1}{2}\left[0 - \frac{(-4)^4}{4}\right]$$

$$= -32$$

مثال: جد

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \cos^2 x \ dx$$

الحل:

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \cos^2 x dx$$

$y = \cos x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{-\sin x}$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = \pi \Rightarrow y = -1$

$$\therefore \int_{0}^{\pi} \sin x \cos^2 x dx = \int_{1}^{-1} \sin x y^2 \frac{dy}{-\sin x}$$

$$= -\int_{1}^{-1} y^2 dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2 dy$$

$$= \left.\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال :

$$\int_1^2 \frac{(x-1)^5}{x^7}\,dx$$

الحل: نبسط المقدار

$$\frac{(x-1)^5}{x^7}$$

$$\frac{(x-1)^5}{x^7} = \frac{(x+1)^5}{x^5} \times \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 . \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{(x+1)^5}{x^7} dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 . \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$y = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2 dy$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 . \frac{1}{x^2}\,dx = \int_2^{\frac{3}{2}} y^5 . \frac{1}{x^2}(-x^2)dy$$

$$= -\int_2^{\frac{3}{2}} y^5 dy$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2} y^5 dy$$

$$= \left.\frac{y^6}{6}\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{2^6}{6} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{6}$$

$= 8.769$

النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل

Fundamental theorem of Calculus

تعريف:

إذا كان f اقتراناً قابلاً للتكامل على [a,b] فإن:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(y)dy \qquad x \in [a,b]$$

يسمى الاقتران المكامل

مثال:

جد الاقتران المكامل للاقتران $f(x) = x^2$ في الفترة [-1,2]

الحل:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(y)dy$$

$$= \int_{-1}^{x} y^2 dy$$

$$= \frac{y^3}{3}\Bigg]_{-1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$$

من خلال F(x) يمكن إيجاد أي تكامل محدود فمثلاً إذا اردنا ايجاد

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

تحقق من ذلك

مثال: اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & 0 \le x < 2 \\ 3x^2+2x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

فجد الاقتران المكامل للاقتران f(x)

الحل:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 2y+4dy & 0 \le x \le 2 \\ \int_0^2 2y+4dy + \int_2^x 3y^2+2ydy & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y^2+4y\Big]_0^x & 0 \le x \le 2 \\ y^2+4y\Big]_0^2 + y^3+y^2\Big]_2^x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2+4x & 0 \le x \le 2 \\ x^3+x^2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

نلاحظ هنا أن f(x) اقتران غير متصل عند x = 2 بينما F(x) اقتران متصل.

مثال :

إذا كان $f(x) = 6x^2 + 2x$ معرف على الفترة [-1,5]

فجد $F'(x)$, $F(x)$

الحل:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} 6y^2 + 2y\,dy$$

$$= 2y^3 + y^2 \Big]_{-1}^{x}$$

$$= 2x^3 + x^2 + 1$$

$$F'(x) = 6x^2 + 2x = f(x)$$

نرى من خلال المثال أن $F'(x) = f(x)$ وهذا يعطي ناتج النظرية الاساسية الاولى في التفاضل والتكامل.

النظرية الاساسية الأولى في التفاضل والتكامل:

إذا كان $f(x)$ متصل على الفترة [a,b] وكان $F(x)$ الاقتران المكامل للاقتران f حيث

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(y)\,dy \quad , \quad \forall\, c \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

مثال: اذا كان

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(y)\,dy = x^3 - 3x + 4$$

فجد f(x)

الحل:

من خلال النظرية نعرف أن $F'(x) = f(x)$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 3$$

مثال: اذا كان

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} f(y)\,dy = \sin\frac{x}{2} + c$$

فجد قيمة C

الحل:

$$F(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} f(y)\,dy = 0$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} + c = 0$$

$$\therefore c = -1$$

نتيجة:

إذا كان f(x) متصل على الفترة [a,b] وكان h(x) قابل للاشتقاق على الفترة (a,b) وكان

$$F(x) = \int_{a}^{h(x)} f(y)\,dy$$

فإن

$$F'(x) = f(h(x)) \,.\, h'(x)$$

مثال: جد

$$\frac{d}{dx}\int_{1}^{2x^2} 5x - 2dx$$

الحل:

$f(x) = 5x - 3 \;\; , \;\; h(x) = 2x^2$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{1}^{h(x)} f(y)\, dy$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int_{1}^{2x^2} 5x - 3dx = F'(x)$$

ومن النتيجة السابق فإن

$$\Rightarrow F'(x) = f(h(x)) \;\; . \;\; h'(x)$$

$$= (5(2x^2) - 3) \, . \, 4x$$

$$= (10x^2 - 3)\, 4x$$

$$= 40x^3 - 12x$$

النظرية الاساسية الثانية في التفاضل والتكامل

اذا كان f اقترانا متصلا على الفترة [a,b] وكان F(x) اقتراناً بدائياً للاقتران f فإن

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

مثال:

باستخدام النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل جد قيمة التكامل

$$\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$$

الحل:

نجد في البداية الاقتران البدائي F(x)

$$F(x) = \int_0^x 3y(1+2y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\left(1+2y^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^x = \left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = F(1) - F(0)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1+2(1)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{2}\left(1+2(0)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل:

The mean – value theorem for integral

إذا كـان f متصـل عـلى الفـترة المغلقـة [a,b]، فإنـه يوجـد عـلى الأقـل عـدد واحـد مثـل $x_1 \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1)(b-a)$$

مثال:

بين فيما إذا كان $f(x) = x^2$ يحقق نظرية القيمة المتوسط ثم جد قيمة x_1 في الفترة [1.4]

الحل:

بما أن $f(x)$ كثير حدود فهو متصل. وبالتالي يحقق النظرية .

$$\int_1^4 x2dx = x_1^2(4-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}\Big]_1^4 = 3x_1^2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right] = 3x_1^2$$

$$\Rightarrow 21 = 3x_1^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = 7 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x_1 = \sqrt{7}$$

نهمل القيمة $\sqrt{7}$ - لأنها لا تنتمي للفترة.

مثال:

جد قيمة x_1 التي تتحقق من تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران

الحل

$$f(x) = -\frac{1}{x^3} \quad , \quad [1,2]$$

$$\int_1^2 \frac{-1}{x^3}dx = \frac{-1}{x^3}(2-1)$$

$$\int_1^2 -x^{-3}dx = \frac{-1}{x^3}$$

$$\frac{+x^{-2}}{+2}\Bigg]_1^2 = \frac{1}{2x^2}\Bigg]_1^2$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{x^3}$$

$$\frac{-3}{8} = \frac{-1}{x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

مشتقة وتكامل الاقترانات اللوغارتمية والأسيه:

Derivative and integration of logarithmic and exponential function:

مشتقة وتكامل الاقترانات اللوغارتميه:

$$1 - \frac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = \frac{1}{x \ln a} \quad , \quad x > 0$$

$$2 - \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0$$

$$3 - \frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{1}{u \ln a} . \frac{du}{dx}$$

$$4 - \frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$$

مثال:

جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

$1 - y = \log_2 x$

$2 - y = \log_5 \left(x^3 - 3x + 1\right)$

$3 - y = \ln \sin x$

الحل:

$$1- \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln 2}$$

$$2- \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 3}{(x^3 - 3x + 1)\ln 5}$$

$$3- \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

مثال:

استخدم اللوغارتمات في ايجاد مشتق الاقتران:

$$y = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x - 14}}{(1 + x^2)^4}$$

الحل:

نأخذ اللوغارتم للطرفين

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^2 \sqrt[3]{7x - 14}}{(1 + x2)^4}\right)$$

$$= \ln x^2 (7x - 14)^{\frac{1}{3}} - \ln(1 + x^2)^4$$

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{3}\ln(7x - 14) - 4\ln(1 + x^2)$$

نشتق الطرفين

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{7}{7x-14} - 4\frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{3x-6} - \frac{8x}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3x-6} - \frac{8x}{1+x2}\right)y$$

$$= \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3x-6} - \frac{8x}{1+x2}\right)\left(\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)4}\right)$$

تكامل الاقترانات اللوغارتمية:

$$5 - \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c$$

مثال:

جد التكاملات التالية:

$$1 - \int_1^e \frac{1}{x}dx$$

$$2 - \int \frac{x^2}{x^3+1}dx$$

$$3 - \int \tan x dx$$

الحل:

$$1 - \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x \Big]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$2 - \int \frac{x^2}{x^3+1}dx$$

نستخدم التكامل بالتعويض:

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{u} \cdot \frac{du}{3x^2} = \tfrac{1}{3} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \tfrac{1}{3} \ln u + c = \tfrac{1}{3} \ln\left(x^3 + 1\right) + c$$

$$= \ln \sqrt[3]{x^3 + 1} + c$$

$$3 - \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int \frac{1}{u} du.$$

$$= -\ln u + e$$

$$= -\ln \cos x + c$$

$$= \ln \frac{1}{\cos x} + c$$

$$= \ln \sec x + c$$

مشتقة وتكامل الاقترانات الأسيه:

$$1-\frac{d}{dx}\left[a^{x}\right]=a^{x}\ln a$$
$$2-\frac{d}{dx}\left[e^{x}\right]=e^{x}$$
$$3-\frac{d}{dx}\left[a^{u}\right]=a^{u}\ln a.\frac{du}{dx}$$
$$4-\frac{d}{dx}\left[e^{u}\right]=e^{u}.\frac{du}{dx}$$
$$5-\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln u}+c$$
$$6-\int e^{u}du=e^{u}+c.$$

مثال:

جد مشتقة الاقترانات التالية:

$$1-y=3^{x}$$
$$2-y=4^{x^{2}-1}$$
$$3-y=e^{\tan x}$$

الحل:

$$1-\frac{dy}{dx}=3^{x}\ln 3$$
$$2-\frac{dy}{dx}=(2x)\left(4^{x^{2}-1}\right)\ln 4$$
$$3-\frac{dy}{dx}=\sec^{2}xe^{\tan x}$$

مثال:

جد التكاملات التالية:

$$1-\int e^{x}dx$$

$$2-\int 2^{5x}dx$$

$$3-\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

$$4-\int_{0}^{\ln 3} e^{x}\sqrt{1+e^{x}dx}$$

الحل:

$$1-\int e^{x}dx = e^{x}+c$$

$$2-\int 2^{5x}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{2^{5x}}{\ln 2}+c$$

$$3-\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$$

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2\sqrt{x}du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{u}}{\sqrt{x}}.2\sqrt{x}du = 2\int e^{u}du$$

$$= 2e^{u}+c$$

$$= 2e^{\sqrt{x}}+c$$

$$4-\int_0^{\ln 3} e^x\sqrt{1+e^x dx}$$

$$u=1+e^x \Rightarrow \frac{du}{dx}=e^x \Rightarrow dx=\frac{du}{e^x}$$

$$x=0\rightarrow u=1+e^0=2$$

$$x=\ln 3\rightarrow u=1+e^{\ln 3}=4$$

$$\therefore \int_0^{\ln 3} e^x\sqrt{1+e^x}dx=\int_2^4 e^x\sqrt{u}\frac{du}{e^x}$$

$$=\int_2^4 u^{1/2}du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_2^4=\frac{2}{3}\left[\sqrt{4^3}-\sqrt{2^3}\right.$$

$$=\frac{2}{3}\left[8-\sqrt{8}\right]$$

تمـــــارين

1- جد التكاملات التالية:

a) $\int x + 5dx$

b) $\int 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x - 12dx$

c) $\int 5 \cos x \, dx$

d) $\int \frac{1}{x^2} dx$

e) $\int \frac{x^7 + x^5}{x^3} dx$

2- باستخدام تعريف التكامل جد التكاملات التالية:

a) $\int_0^1 x^2 \, dx$

b) $\int_1^2 2x^2 + x + 5 \, dx$

c) $\int_0^1 (x+1)^2 \, dx$

d) $\int_0^4 \frac{1}{x^2} dx$

3- جد مساحة كل من الاقترانات التالية والمستقيمات المناظرة لكل منها:

a) $f(x) = 2x + 1$ $\quad x = 1 , x = 3$

b) $f(x) = x^2$ $\quad x = 0 , x = 2$

c) $f(x) = 3 - x^3$ $\quad x = 1 , x = 5$

4- باستخدام التكامل بالتعويض جد التكاملات التالية:

a) $\int x^2 (x^3 + 5)^2 \, dx$

b) $\int \sec^2 x \tan x \, dx$

c) $\int \frac{\cos}{\sin^3 x} \, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} \, dx$

e) $\int_1^2 \frac{2x - 6}{\sqrt{-x^2 + 6x + 12}} \, dx$

f) $\int x^2 \sqrt{1 + x} \, dx$

h) $\int [\csc(\sin x)]^2 \cos x \, dx$

5- جد $F'(x)$ فيما يلي:

a) $F(x) = \int_1^x \cos^2 (\sin y) \, dy$

b) $F(x) = \int_1^{\sin x} y^2 + 4 \, dy$

c) $F(x) = \int_{2}^{x^2} \frac{2y}{y^2+5y+3}\, dy$

6- اذا كان $F(x) = \int_{0}^{x} y(y^2+1)^4\, dy$ فجد F(1)

7- احسب قيمة $\int_{-2}^{2} |x-1|\, dx$

8- اذا كان $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 2\int_{0}^{c} 3z\,dz) = -20$ فما قيمة c

9- اذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & -1 \le x < 2 \\ 6-4x & 2 \le x \le 4 \end{cases}$ فجد F(x)

10- اذا كان $F(x) = \int_{\frac{\pi}{8}}^{3x} f(y)\, dy = \sin 2x + c$ فجد قيمة c

11- اذا كان f كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان المشتقة الثانية له f(x)=2x+1 والنقطة (0,2) نقطة حرجة له، فما هي قاعدة الاقتران f .

12- اذا كان $\int_{1}^{8} 5f(x)dx = 25$, $\int_{1}^{4} f(x)dx = 8$ فجد

$$\int_{4}^{8} (3x^2 - 6f(x))dx$$

13- جد $\int (\tan^5 x + \tan^7 x)\, dx$

14- اذا كان $\int_{0}^{8} f(x)dx = 10$ فجد $\int_{0}^{2} 2x^2 f(x^3)dx$

15- جد كثير الحدود f(x) من الدرجة الأولى في (x) بحيث:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = 4, \int_{1}^{3} f(x)dx = 2$$

16- اذا كانت

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

فجد

1) $F'(x)$

2) $\int_{0}^{4} f(x)dx$

17- جد قيمة x_1 التي تتحقق من نظرية القيمة المتوسطة لكل من الاقترانات التالية في الفترة ازاء كل منها

1- $f(x) = \sqrt{x}$, [0 , 9]

2- $f(x) = \sin x$, $[-\pi , \pi]$

3- $f(x) = \frac{1}{x^2}$, [1 , 3]

18- جد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

1- $y = (\ln x)^2$

2- $y = \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

3- $y = \cos e^{7x}$

4- $y = x\,[\,\log_2 (x^2 - 2x)\,]^3$

5- $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$

6- $y = e^{\sec^2 x}$

7- $y = e^{\frac{1}{x}} + \ln(\cos e^x)$

8- $y = \ln(\ln x)$

19- استخدام اللوغارتمات في ايجاد مشتقة كل من الاقترانات

1- $y = x\sqrt[3]{2 + 5x^2}$

2- $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \sin x}{x^2}}$

3- $y = \dfrac{(x + 8)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^3 + 1}}{x^4 - 5x + 4}$

20- جد التكاملات التالية :

1- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

2- $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x e^{-x^2}\,dx$

3- $\displaystyle\int \frac{\text{con}5x}{2 + \sin 5x}\,dx$

4- $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx$

5- $\int \cot x \, dx$

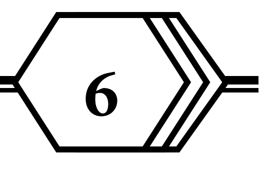
6- $\int \cos x \, \csc x \, dx$

7- $\int_{0}^{e} \frac{dx}{x+e}$



تطبيقات التكامل

Applications of definite Integral



الوحدة السادسة

تطبيقات التكــامل

Application of definite Integral

المساحة: Area

1- المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور x – axis

تعرف المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) ومحور x – axis والمحددة بالمستقيمات x = b , x = a عن طريق التكامل كالآتي:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

لكن في بعض الحالات تكون قيمة التكامل بالسالب والمساحة لا يمكن أن تكون بالسالب ومن أجل تحويل القيمة السالبة إلى موجبة نأخذ القيمة المطلقة.

$$\therefore A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) = 4x-1 والمحددة بالمستقيمين x = 1 , x = 3 .

الحل:

$$A = \left|\int_1^3 4x - 1dx\right|$$

$$= \left|2x^2 - x\right|_1^3$$

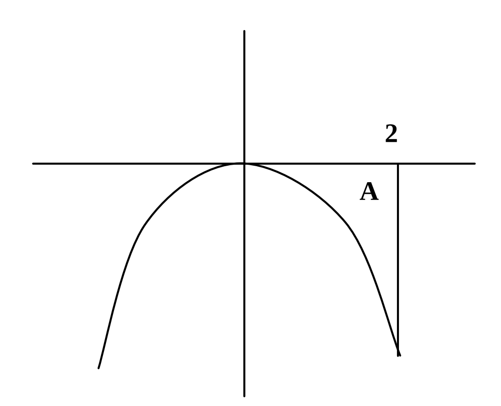
$$= |(2)(3)^2-3)-(2(1)^2-1)|$$

$$= |15-1| = 14 \text{ u.a}$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2$ ومحور x-axis ومحددة بالمستقيمات $x = 2 , x = 0$.

الحل:



$$A = \left|\int_0^2 - x^2 dx\right|$$

$$= \frac{-x^3}{3}\Big]_0^2$$

$$= \left| \frac{-(2)^3}{3} - \frac{-(0)^3}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{-8}{3} \right| = \frac{8}{3} \text{ u.a}$$

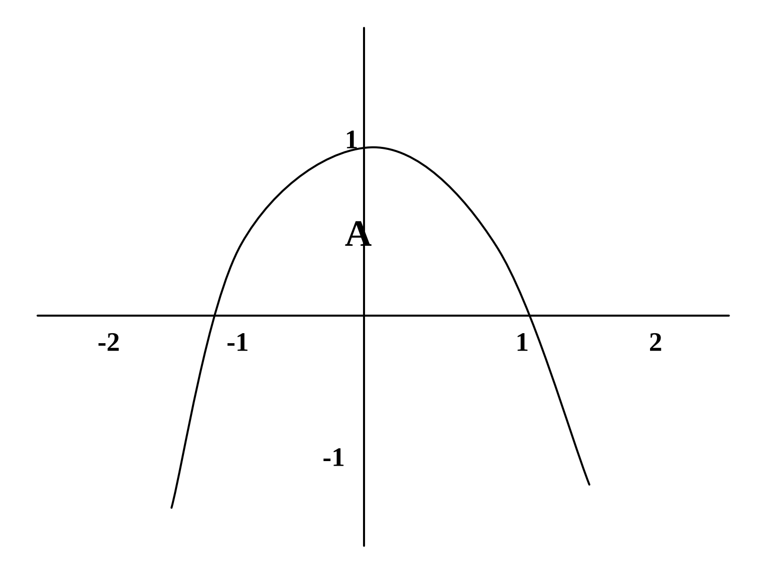
مثال:

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 1 - x^2$ ومحور x-axis

الحل:

نجد في البداية حدود التكامل وذلك بمساواة الاقتران بالصفر.

$$\therefore\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$\therefore A = \left| \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx \right|$$

$$= \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1}$$

$$= \left|\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right|$$

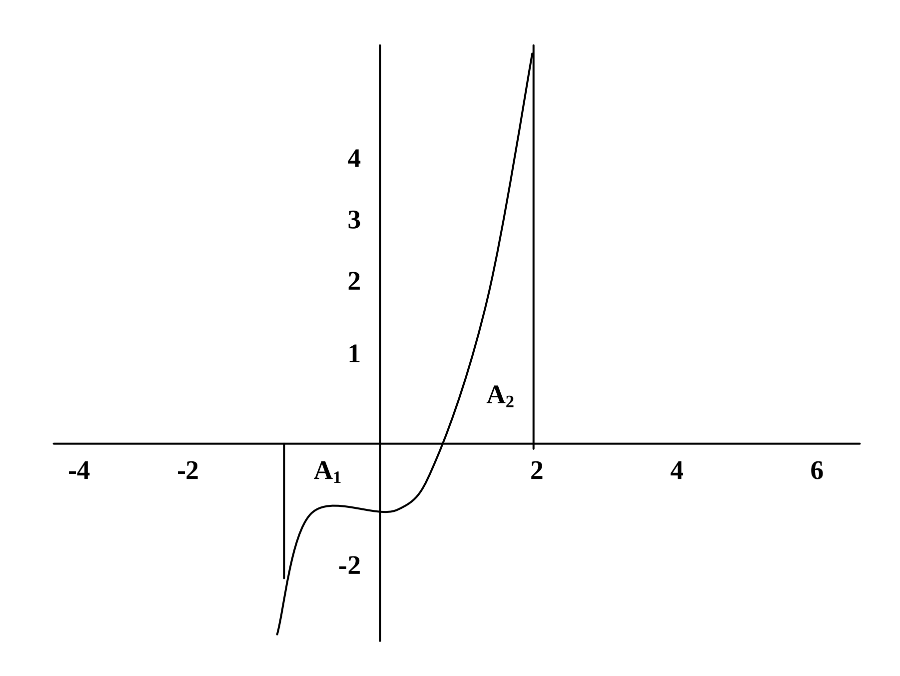
$$= \left|\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3} \text{ u.a}$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^3-1$ والمحدد بالمستقيمين $x = -1$, $x = 2$

الحل:

من خلال الرسم نلاحظ أن المساحة المطلوبة تنقسم إلى قسمين حيث يقع جزء في السالب وجزء في الموجب وبالتالي إذا أوجدنا المساحة المباشرة لن تعبر عن المساحة الحقيقية ولذلك لابد في هـذه الحالـة من تقسيم المساحة إلى مساحتين.



$$\therefore A = \left|\int_{-1}^{1}(x^3-1)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3-1)dx\right|$$

$$= \left|\frac{x^4}{4}-x\right|_{-1}^{1} + \left|\frac{x^4}{4}-x\right|_{1}^{2}$$

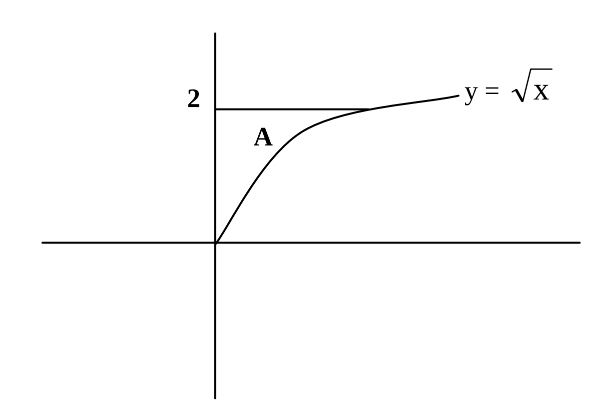
$$= \left|\left(\frac{1}{4}-1\right)-\left(\frac{1}{4}+1\right)\right| + \left|\left(\frac{2^4}{4}-2\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right|$$

$$= |-2| + \left|2+\frac{3}{4}\right|$$

= 4.75 u.a

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y=\sqrt{x}$ ومحور y – axis ومحددة بالمستقيمات y = 0 , y = 2



الحل:

نجد هنا التكامل بالنسبة للمتغير y حيث:

$$A = \left| \int_{y_1}^{y_2} f(y)dy \right|$$

لذلك نحول الاقتران بدلالة المتغير y

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

$$\therefore A = \left| \int_0^2 y^2 dy \right|$$

$$= \frac{y^3}{3} \Big]_0^2$$

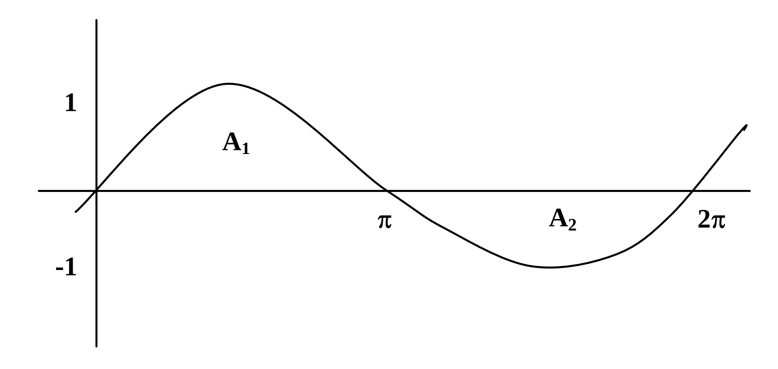
$$= \left| \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right| = \frac{8}{3} \text{ u.a}$$

مثال:

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى f(x) = sinx ومحور x-axis في الفترة [0 , 2π]

الحل:

نرسم الاقتران لنحدد المساحة المطلوبة



$$\therefore A = \left|\int_0^{2\pi} \sin x dx\right|$$

نجزء التكامل

$$= \left|\int_0^{\pi} \sin x dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right|$$

$$= \left|-\cos x\right|_0^{\pi} + \left|-\cos x\right|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= |-\cos \pi + \cos 0| + |-\cos 2\pi + \cos\pi|$$

$$= |1 + 1| + |-1 - 1|$$

$$= 2 + 2 = 4 \text{ u.a}$$

2- المساحة المحصورة بين منحنيين

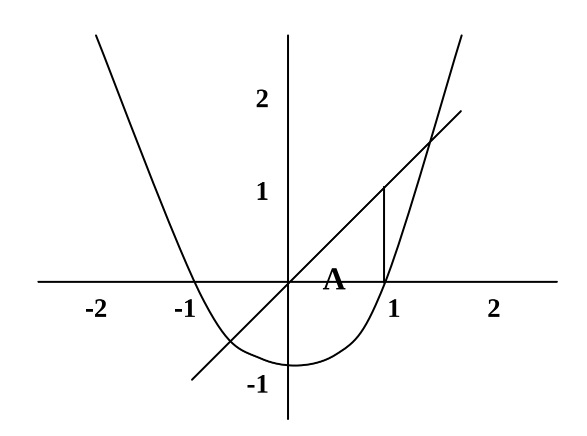
اذا كان $f(x)$, $h(x)$ اقترانيين قابلين للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإن المساحة المحصورة بين منحنيـي $f(x)$, $h(x)$ والمحددة بالمستقيمان $x = a$, $x = b$ هي:

$$A = \left|\int_a^b (f(x) - h(x)dx\right|$$

مثال:

جد المساحة المحصورة بين منحنيي $f(x) = x^2 - 1$ ، $h(x) = x$ والمحدد بالمستقيمان $x = 0$, $x =$

الحل



$$A = \left| \int_0^1 h(x) - f(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^1 x - (x^2 - 1) dx \right|$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \Big]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) - 0$$

$$\therefore A = \frac{7}{6} \text{ u.a}$$

مثال :

إذا كان $f(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ جد المساحة المحصورة بين $h(x)$, $f(x)$

الحل:

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x - \cos x dx \right|$$

$$= \left| -\cos x - \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left| \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (-1 - 0) \right|$$

$$= \left| \frac{-2}{\sqrt{2}} + 1 \right|$$

$$= \left| -\sqrt{2} + 1 \right|$$

$$= \sqrt{2} - 1 \text{ u.a}$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y_1 = \frac{1}{8}x^3$ ومنحنى

$$y_2 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x$$

الحل:

لايجاد حدود التكامل نساوي الاقترانيين ببعضهما $y_1 = y_2$

$$\frac{1}{8}x^3 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x = 0$$

نضرب المعادلة في 8-

$-x^3 + 2x^3 + x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$

$\Rightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = -2 , 0 , 1$

$\therefore$ سيكون هناك منطقتان

$$\therefore A = \left|\int_{-2}^{0} \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x dx\right| + \left|\int_{0}^{1} \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} -\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x dx\right| + \left|\int_{0}^{1} -\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x dx\right|$$

$$= \left|\frac{-x^4}{32} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8}\right|_{-2}^{0} + \left|-\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8}\right|_{0}^{1}$$

$$= \left|0 - \left(\frac{-16}{32} + \frac{8}{24} + \frac{4}{8}\right)\right| + \left|\left(\frac{-1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) - 0\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{5}{96}\right|$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96} \text{ u.a}$$

الحجم : Volume

لايجاد حجم الجسم المتولد عن دوران منحنى f(x) حول محور x او y نتبع إحدى طريقتين:

1- طريقة القرص الدائري Volume by disks

أ- حجم الجسم المتولد عن دوران منحنى f(x) حول محور x في الفترة [a,b] هو:

$$v = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

ب- حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى f(x) ومنحنى h(x) حول محور x في الفترة [a,b] هو

$$v = \pi\int_a^b (f(x))^2 - (h(x)^2)\ dx$$

مثال:

جد حجم الجسم المتولد عن دوران f(x) = 3x حول محور x دورة كاملة في الفترة [0,2]

الحل:

$$v = \pi\int_0^2 (3x)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^2 9x^2 dx$$

$$= \pi\left[3x^3\right]_0^2$$

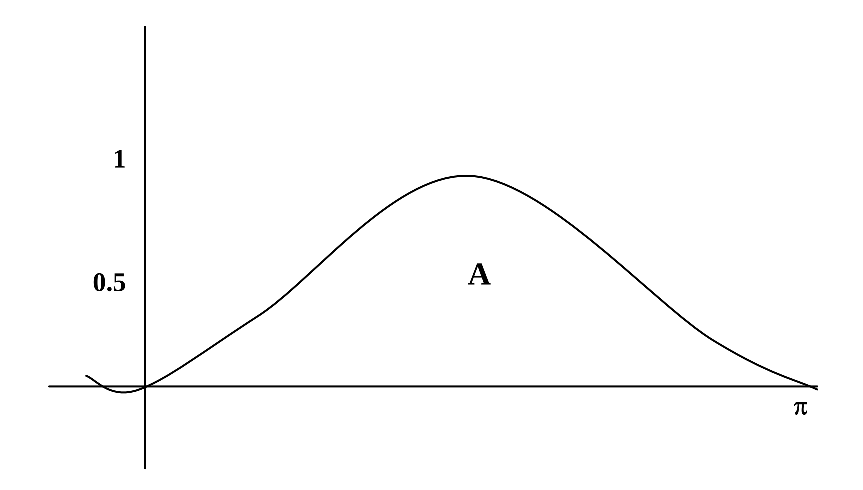
$$= \pi\ [24 - 0] = 24\pi\ u.v$$

مثال:

جد حجم الجسم المتولد عن دوران $f(x) = \sin x$ حول محور x دورة كاملة في الفترة $[0, \pi]$

الحل:

من الشكل نرى أن حدود التكامل هي π , 0



$$\therefore\ v = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\therefore\ v = \pi\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

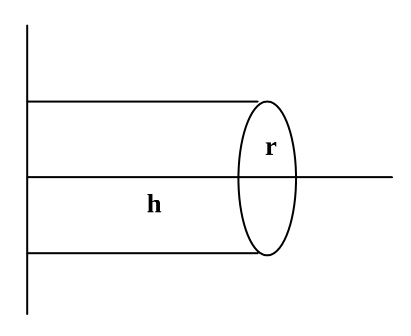
$$= \frac{\pi^2}{2}\ \text{u.v}$$

مثال :

باســــتخدام الحجـــوم الدورانيـــة اثبـــت أن حجـــم الاســـطوانة الدائريـــة هو $v = \pi r^2 h$ حيث r نصف قطر القاعدة h الارتفاع

الحل:

نعرف الاقتران y = r في الفترة [0,h] كما في الشكل:



$$\therefore v = \pi\int_0^h r^2 dx$$

$$= \pi r^2 [x]_0^h$$

$$= \pi r^2 h$$

مثال:

جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بـين الاقترانـين $f(x)=4x-x^2$ ، $h(x)=x$ حـول محور x دورة كاملة.

الحل:

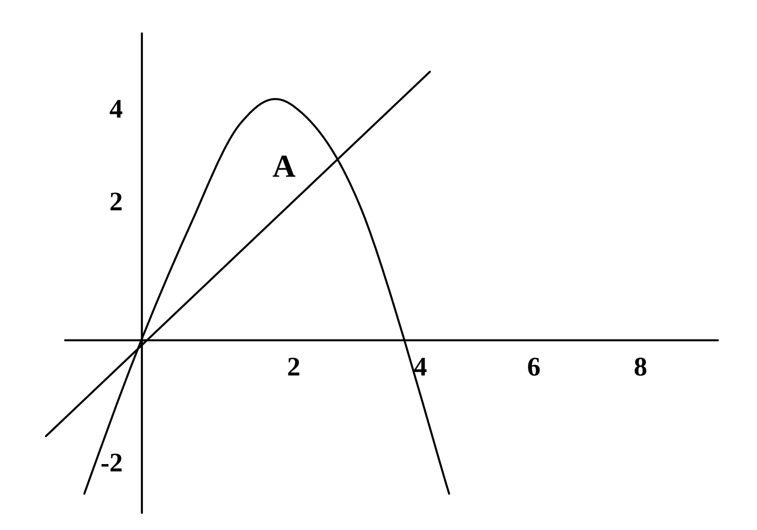
لايجاد حدود التكامل نساوي الاقترانين ببعضهما

$$4x - x^2 = x$$

$$3x - x^2 = 0$$

$x\,(3 - x) = 0$

$\therefore\ x = 0\ ,\ 3$



$$\therefore\ v = \pi\int_0^3 \left(4x - x^2\right)^2 - (x)^2\ dx$$

$$= \pi\int_0^3 16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2\ dx$$

$$= \pi\int_0^3 15x^2 - 8x^3 + x^4\ dx$$

$$v = \pi\left[5x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^3$$

$$= \pi\left[5(3)^3 - 3(3)^4 + \frac{(3)^5}{5} - 0\right]$$

$$= -59.4\,\pi$$

لكن الحجم لا يمكن أن يكون بالسالب لذلك نأخذ القيم المطلقة وتحول السالب إلى موجب.

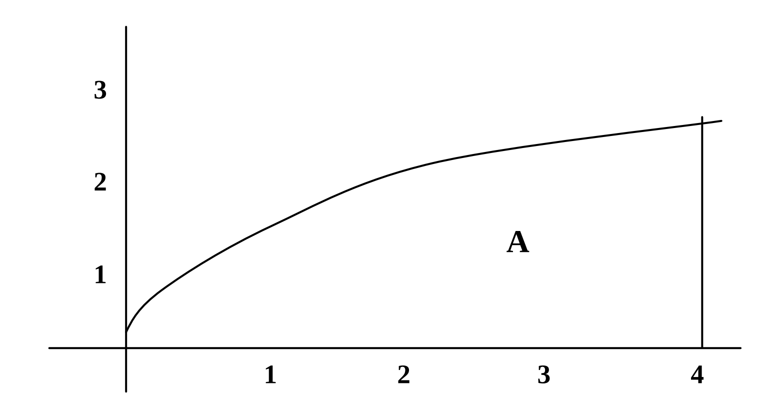
$\therefore\ v = 59.4\ u.v$

مثال :

جـــد حجـــم الجســـم المتولـــد عـــن دوران المنطقـــة المحصـــورة بـــين الاقـــتران $y = \sqrt{x}$ ومحور x والمستقيم x=4 حول محور y

الحل:

من خلال الرسم نلاحظ أن المنطقة المحصورة بين الاقترانين $x=y^2$ ، $x=4$ في الربع الأول



ولايجاد حدود التكامل نساوي الاقترانين

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

لكن هنا نهمل الاشارة السالبة وذلك لان المنطقة محددة بمحور x فتكون حدود التكامل y = 0 , y = 2

$$\therefore v = \int_0^2 ((4)^2 - (y^2)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^2 16 - y^4 \, dy$$

$$= \pi \left[16y - \frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(32 - \frac{(2)^5}{5} \right) - 0 \right]$$

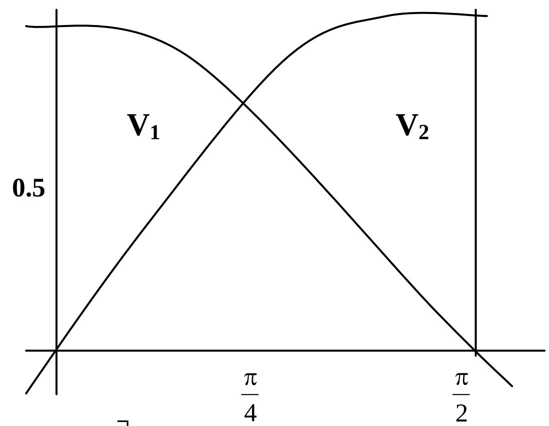
$$= 25.6 \, \pi \text{ u.v}$$

مثال:

جد حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بين الاقترانين y=sinx ، y = cosx في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ حول محور x

الحل:

نرسم أولاً الاقترانين لنحدد المنطقة التي ستدور حول محور x من خلال الرسم نرى أن المنطقة المحصورة تنقسم إلى منطقتين الأولى من x =0 إلى $x = \frac{\pi}{4}$ والثانية من $x = \frac{\pi}{4}$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$



$$\therefore v_1 = \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx \right]$$

$$v_2 = \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) dx \right.$$

نجد كل حجم على حدة ثم نجمع الحجمين في النهاية.

$$v_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$= \pi \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$v_2 = \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos 2x dx = \frac{-\pi}{2}[\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore v = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ u.v}$$

2- طريقة القشرة الاسطوانية: Volume by cylindrical shells

الحجم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بين منحني f(x) ومحـور x حـول محـور y في الفـترة [a,b] هو:

$$v = 2\pi\int_a^b x\, f(x)dx$$

مثال:

جد حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بـين منحنـى $f(x)=2x-x^2$ ومحـور x حـول محور y

الحل:

نساوي الاقتران بالصفر لايجاد حدود التكامل

$2x - x^2 = 0$

$\Rightarrow x(2 - x) = 0$

$\Rightarrow x = 0,2$

$$v = 2\pi\int_0^2 x\,(2x - x^2)dx$$

$$= 2\pi\int_0^2 2x^2 - x^3\, dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi\left[\frac{(2)(2)^3}{3} - \frac{2^4}{4}\right]$$

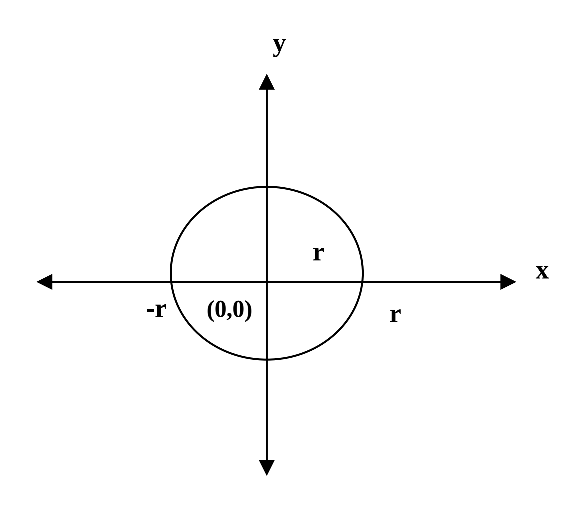
$$= \frac{8}{3}\pi \text{ u.v}$$

مثال:

جـــد الحجـــم المتولـــد عـــن دوران المنطقـــة المحـــدود بـــالاقتران $x^2 + y^2 = r^2$ حول محور x بطريقة القشرة الاسطوانية.

الحل:

تمثل المعادلة $x^2 + y^2 = r^2$ دائرة مركزها (0,0) ونصف قطرها (r) كما في الشكل.



نأخذ نصف الدائرة مع محور y ودورانها حول محور x يشكل كرة نصف قطرها (r) ويكون حجمها متساوي في الربع الأول والثاني (أي الموجب والسالب) لذلك نأخذ ربع الدائرة ونجد حجمها ونضربه في (2) ليكون الحجم المطلوب ويكون الاقتران بدلالة y هو $x = \sqrt{r^2 - y^2}$

$$\therefore v = (2)(2\pi)\int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\ dy$$

$$= 4\pi\int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\ dy$$

نفرض

$$z = r^2 - y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -2y \Rightarrow dy = \frac{dz}{-2y}$$

$$\therefore v = 4\pi\int_0^r y\sqrt{z}\,\frac{dz}{-2y}$$

$$= -2\pi\int_{y=0}^{y=r} z^{\frac{1}{2}}\ dz$$

$$= -2\pi\left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=r}$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[\left(r^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r$$

$$= \frac{-4\pi}{3}\left[\left(r^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(r^2 - 0\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{-4\pi}{3}\left[-r^3\right]$$

$$= \frac{4r^3\pi}{3} \text{ u.v}$$

وهذا قانون ايجاد حجم الكرة

اذا دارت منطقة محصورة بين منحيي f(x) , h(x) حول محور y فـإن حجـم الجسـم المتولـد عـن الـدوران بطريقة القشرة الاسطوانية هو:

$$v = 2\pi\int_a^b x\left[f(x) - h(x)\right]dx$$

مثال :

جد حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية:

$$y = x^2 + 2 \text{ , } y = \frac{x+2}{2} \text{ , } x = 0 \text{ , } x = 1$$

حول محور y

الحل:

$$v = 2\pi\int_0^1 x\,(y_2 - y_1)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 x\left(x^2 + 2 - \frac{x+2}{2}\right)dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xdx$$

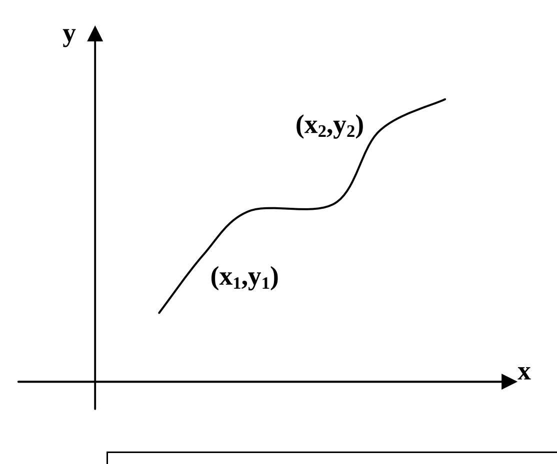
$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{7}{6}\pi \text{ u.v}$$

طول المنحنى المستوي (طول القوس) Length of a plane Curve

إذا كان منحنى $y = f(x)$ ممثلاً بالشكل التالي واردنا إيجاد طول المنحنى من النقطة (x_1 , y_1) الى النقطة (x_2 , y_2) فإن :



1- طول المنحنى إذا كان الاقتران بدلالة x

هو:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

2- إذا كان الاقتران بدلالة y فإن

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

3- أما اذا كانت كل من y , x بدلالة t فإن

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

مثال :

جد طول منحنى $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$

الحل:

نجد أولاً

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore L = \int_{0}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \int_{0}^{1} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

$$\therefore L = \left[\frac{8}{27}\left(\frac{9}{4}x+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(\frac{9}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

مثال :

جد طول منحنى $x = \dfrac{\sqrt{(y-1)^3}}{3}$ من $y = 0$ إلى $y = 3$

الحل:

$$x = \frac{1}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(y-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(y-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore L = \int_0^3 \sqrt{\left[\frac{1}{2}(y-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + 1}\,dy$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{y-1}{4} + 1}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{y+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(y+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3+3)^{\frac{3}{2}} - (3)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[6\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\right]$$

$$= 2\sqrt{6} - \sqrt{3}$$

مثال :

جد طول المنحنى المحدد بالمتغيرين x = sint , y = cost من t =1 الى t=4

الحل:

$$\frac{dx}{dt} = \text{cost}$$

$$\frac{dy}{dt} = \text{-sinte}$$

$$\therefore L = \int_0^4 \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^4 \sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^4 dt$$

$$= 4$$

مساحة السطح الدوراني Area of asurface of revolution

إذا دار منحنى الاقتران حول إحدى المحورين فإن المساحة الجانبية لسطح الجسم المتولد عن الدوران هي:

أ- اذا دار حول محور x – axis فإن:

$$A = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\, dx$$

ب- إذا دار حول محور y-axis فإن:

$$A = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

جـ- إذا كان المتغيران x ,y معطيان بدلالة t فإن:

$$A = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} z\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = dt$$

حيث $z = x$ اذا كان الدوران حول محور y-axis

$z=y$ اذا كان الدوران حول محور x-axis

مثال :

إذا دار منحنى $y = f(x) = 3x + 1$ دورة كاملة حول محور x من $x=0$ ، $x=2$ فجد مساحة السطح الناتج لهذا الجسم.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$A = 2\pi\int_0^2 y\sqrt{(3)^3 + 1}\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^2 (3x + 1)\sqrt{10}\, dx$$

$$= 2\sqrt{10}\pi\left[\frac{3x^2}{2} + x\right]_0^2$$

$$= 16\sqrt{10}\pi \text{ u.a}$$

مثال :

جد المساحة الجانبية لسطح الكرة التي نصف قطرها r

الحل:

الكرة تتولد من دوران نصف دائرة حول أحد المحاور لنأخذ مركزها نقطة الأصل ومعادلتها $x^2 + y^2 = r^2$ تدور حول محور y

نأخذ ربع الدائرة في الربع الأول ونجعلها تدور حول محور y فتولد نصف كرة مساحتها الجانبية هي:

$$A = 2\pi\int_0^r x\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

وبذلك تكون المساحة الجانبية لسطح الكرة ضعف هذه المساحة

أي:

$$A = 4\pi\int_0^{\pi} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{y^2 - r^2}$$

$$\therefore A = 4\pi\int_0^{r} x\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - y^2} + 1}\,dy$$

$$= 4\pi\int_0^{r} x\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - y^2}}\,dy$$

$$= 4\pi\int_0^{r} x\frac{r}{x}\,dy$$

$$= 4\pi\int_0^{r} r\,dy$$

$$= 4\pi r^2 \text{ u.a}$$

مثال :

تتحرك النقطة (x,y) في المستوى من الصفر محدثة وراءها اثراً على شكل منحنى فإذا دار هذا المنحنى حول محور y بعد ثانيتين من بدى حركته فما هي المساحة الجانبية لسطح الجسم المتولد عن الدوران.

إذا كانت $x = 2t$ ، $y = t^2 - 3$

الحل:

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\therefore A = 2\pi\int_0^2 x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

$$= 2\pi\int_0^2 2t\sqrt{4+4t^2}\ dt$$

$$z = 4 + 4t^2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 8t \Rightarrow dt = \frac{dz}{8t}$$

$$t = 0 \Rightarrow z = 4 \text{ , } t = 2 \Rightarrow z = 20$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{2}\int_4^{20} z^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_4^{20}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[(20)^{\frac{3}{2}} - (4)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \text{ u.a}$$

تمـــــارين

1- جد المساحة المحصورة بين منحنى f(x) ومحور X والمستقيمان x = a , x=b في كل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = x^3$ $x = -1 , x = 1$

b) $f(x) = x^3 - 4x + 12$ $x = 1 , x = 3$

c) $f(x) = \cos x$ $x = 0 , x = \frac{\pi}{2}$

2- جد المساحة المحصورة بين منحنى y ومحور x لكل مما يلي:

a) $y = x^3 - 9$

b) $y + x^2 = 1$

c) $y = x^2 - 5x + 6$

3- جد المساحة المحصورة بين منحنى f(x) ومحور y فيما يلي:

a) $x - y - 2 = 0$ ومحور x

b) $x = 4y - y^3$

c) $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $y = 0 , y = 1$

4- جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

a) $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $y = 1 - x^2$, $y = x - 1$

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$

5- جد حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية حول المحور المطلوب:

a) $y = \sqrt{x}$ $x = 0$, $x = 4$ x –axis

b) $y = x^3$, $y = 4x$ x –axis

c) $x = y^3$, $y = x + 2$ y –axis

d) $y = \frac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$ y –axis

6- جد حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بمنحنيي $y = x^3$, $y=4$ حول المستقيم $x = 4$

7- استخدم القشرة الاسطوانية في إيجاد الحجوم المحددة بمنحنيات الاقترانات التالية حول المحور المطلوب:

a) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$ y –axis

b) $y = x^3$, $y = 8x$ y –axis

c) $y^3 = x$, $y = 3$, $x = 0$ x –axis

d) $2y = x$, $y = 4$, $x = 1$ x –axis

8- باستخدام الحجوم الدورانية أثبت أن حجم المخروط الدائري القائم الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هو $v = \frac{\pi}{3} r^3 h$

9- جد الحجم المتولد عن دوران المنحنى $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور x

10- abc مثلث إحداثيات رؤوسه هي a(9,0) , b(4,5) , c(1,2) تحدد أضلاعه الثلاثة المنطقة A جد حجم الجسم المتولد عن دوران هذه المنطقة حول محور x

11- احسب طول المنحنى لكل من الاقترانات التالية:

a) $x^4 + 48 = 24xy$ $x = 2 , x = 4$

b) $x = \frac{1}{3}(y+2)$ $y = 1 , y = 7$

c) $x = t^2 , \ y = t^3$ $t = 0 , t = 4$

d) $x = r \cos t , y = r \sin t \quad t \in [0 , \pi]$

12- جد المساحة الجانبية للسطح الدوراني لكل من الاقترانات التالية حول المحور المطلوب

a) $y^4 = 16x \quad , x \in [0 , 12]$ x –axis

b) $y = \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}} \quad , x \in [0,3]$ x –axis

c) $y = x^2$ y –axis between (0,0) , (2,4)

d) $y = \frac{x^2+1}{2} \quad , x \in [0,1]$ y –axis

13- المنحنى الموصوف بالنقطة (x,y) حيث x = t+1 ، $y = \frac{t^2}{2}+t$ من t=0 الى t=4 يدور حول y –axis ، جد المساحة الجانبية للسطح الدوراني الناتج.

14- جد المساحة الجانبية للسطح الدوراني الناتج عن دوران المنحنى $y = t$ ، $x=t^2$ حيث $0 \le t \le 1$ حول x –axis

15- جد المساحة الجانبية للاسطوانة الدائرية التي نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h

16- إذا دار منحنى القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ حول محـور x فجـد المسـاحة الجانبيـة لسـطح هـذا الجسم.

ملحــق

حل المعادلات: يقصد بحل المعادلة ايجاد قيم x التي تحقق المعادلة.

1- حل المعادلة الخطية: linear equation

المعادلة الخطية على الصورة ax+b=0

ويكون حلها $x = \frac{-b}{a}$

مثال:

جد حل المعادلات التالية:

$$1 - 2x - 6 = 0$$
$$2 - 3x = 9$$
$$3 - 2x - 1 = 3x + 5$$

الحل:

$$1 - 2x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow x = -\frac{(-6)}{2} = 3$$
$$2 - 3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$
$$3 - 2x - 1 = 3x + 5$$
$$\Rightarrow 3x - 2 = -1 - 5$$
$$x = -6$$

2- حل المعادلة التربيعية: quadratic equation

الصورة العامة للمعادلة هي $ax^2 + bx + c = 0$

ويكون حل هذه المعادلة بعدة طرق منها الأقواس، والفرق بين مربعين واكمال المربع، والقانون العام.

وسنستخدم القانون العام في الحل حيث

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وتسمى القيمة تحت الجذر $(\Delta = b^2 - 4ac)$ بالمميز.

وهناك ثلاثة حالات لحل هذه المعادلة :

حلين للمعادلة:

$$1 - \Delta > 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يوجد حل وحيد للمعادلة

$$2 - \Delta = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

لا يوجد حل حقيقي للمعادلة

$$3 - \Delta < 0$$

مثال:

جد حل كل من المعادلات التالية:

$1 - x^2 - 5x - 6 = 0$

$2 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$3 - x^2 - 2x + 5 = 0$

$4 - x^2 - 25 = 0$

الحل:

$1 - \Delta = (-5)^2 - (4)(1)(-6) = 25 + 24 = 49 > 0$

يوجد حلين للمعادلة

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2} = \frac{5-7}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(5) + \sqrt{49}}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$$

$2 - \Delta = (-4)^2 - (4)(1)(4) = 16 - 16 = 0$

حل وحيد للمعادلة

$$x = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

$3 - \Delta = (-2)^2 - (4)(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

$4 - \Delta = (o)^2 - (4)(1)(-25) = 100 > 0$

$$\therefore x_1 = \frac{o - \sqrt{100}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{o + \sqrt{100}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

حل نظام من المعادلات: System of equations:

1- حل نظام معادلتين بمجهولين: نستخدم إما طريقة الحذف أو التعويض.

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات

$$2x - y = 3$$
$$x + y = 6$$

الحل: نجمع المعادلتين (طريقة الحذف)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 6 \\ \hline 3x &= 9 \\ \therefore\ x &= 3 \end{aligned}$$

نعوض في احدى المعادلتين ولتكن (2) :

$$x + y = 6$$
$$3 + y = 6$$
$$\Rightarrow y = 3$$

2- حل نظام ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل:

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات:

$$x + y + z = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + y - z = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$3x + 2z = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

الحل: نستخدم طريقة التعويض: من المعادلة (1)

$$y = 6 - x - z$$

نعوضها في المعادلة (2)

$$2x + (6 - x - z) - z = 1$$
$$\Rightarrow x - 2z = -5$$
$$\Rightarrow x = 2z - 5$$

نعوضها في المعادلة (3)

$$3(2z - 5) + 2z = 9$$
$$8z = 24$$
$$\Rightarrow z = 3$$
$$\therefore x = (2)(3) - 5 = 6 - 5 - = 1$$
$$y = 6 - 1 - 3 = 2$$

بعض قوانين المساحة والجسم

1- مساحة متوازي الاضلاع= القاعدة في الارتفاع $A = ah.$

2- مساحة المثلث= $\frac{1}{2}$ (القاعدة) (الارتفاع) $A = \frac{1}{2}ah.$

3- مساحة شبه المنحرف= $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) (الارتفاع) $A = \frac{1}{2}(a+b)h.$

4- مساحة الدائرة= π (نصف القطر تربيع) $A = \pi r^2$

5- حجم الاسطوانة= (مساحة القاعدة) (الارتفاع) $v = \pi r^2 h.$

6- حجم المخروط= $\frac{1}{3}$. (مساحة القاعدة) (الارتفاع) $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

7- حجم الدائرة= $\frac{4}{3}\pi$ (نصف القطر تكعيب) $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

8- حجم متوازي المستطيلات= (الطول) (العرض) (الارتفاع) $v = abh$

9- المساحة الجانبية للاسطوانه: $s = 2\pi rh$

10- المساحة الجانبية للمخروط: (الطول الجانبي l) $s = z\pi rl$

11- مساحة سطح الكرة $s = 4\pi r^2$

قائمة الرموز والمصطلحات

الرمز	المعنى بالانجليزية	المعنى بالعربية
R	Real numbers	الاعداد الحقيقية
r	rational numbers	الاعداد النسبية
z	Integer numbers	الاعداد الصحيحة
C	Complex numbers	الاعداد المركبة
N	Natural numbers	الاعداد الطبيعية
I	Interval	فترة
d	distance	مسافة
f	function	إقتران
$\in$	Belongs	تنتمي
o	After	بعد
f^{1}	Inverse function	الاقتران المعكوس
$\vert \quad \vert$	Absolute value	القيمة المطلقة
[x]	Integer x	صحيح x
Log	Logarithm	لوغارتم
Ln	Natural Logarithm	اللوغارتم الطبيعي
sin	sin	جيب
cos	cosin	جيب تمام
tan	tangent	ظل
cot	cotangent	ظل تمام
sec	secant	قاطع

المعنى بالعربية	المعنى بالانجليزية	الرمز
قاطع تمام	cosecant	csc
النهاية	Limit	Lim
إبسلون	epselon	ε
دلتا	delta	δ
لكل	for all	$\forall$
يوجد	there exit	$\exists$
متوسط التغير	Rate of change	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
ميل	Slop	M
مشتقة	derivative	f'
سرعة	velocity	v
تسارع	acceleration	a
زمن	time	t
تكامل	Integral	$\int$
مساحة	Area	A
الاقتران المكامل	Anti derivative	F(x)
الحجم	Volume	V
طول المنحنى	Length of curve	L
وحدة المساحة	Unit aria	u.a
وحدة حجم	Unit volume	u.v

المراجع

1- Calculus, Lipman Bers, 1969.

2- Calculus and Analytic geometry, Williem H. Durfee, 1971.

3- Concepts of Calculus I, A.H. Lightstons, 1965.

4- Calculus and Analytic geometry, G.B. Thomas, R.L. Finney, 5th edition, 1979.

5- Calculus with Analytic geometry, E.W. Swokeowski, 1979.

6- Elementary Differential Equation with application, 2nd ed., W.R. Derrick, S.I. Grossman, 1981.

7- The elements of real analysis, R.G. Bartle, 2nd ed., 1976.

8- Higher Marhematics, V.S. Shipachev. 1988.

9- Problem Book in mathematircs, O.N. A fanasyeva and other's, 1989.

10- Calculus, Howard Anton, 6th ed., 1999.

11- مبادىء التفاضل والتكامل، د. توفيق انطون، 1972.

12- مبادىء الرياضيات تفاضل وتكامل، د. علي عزيز علي وآخرون، 1980.

13- التفاضل والتكامل المتقدم، مواري د. سبيجل، 1977.

14- التفاضل والتكامل، د. محمد ابو صالح وآخرون، 1985.

15- الرياضيات، فتحي خليل وآخرون، 1990.

16- الرياضيات العامة، د. احمد عثمان وآخرون، 1997.

17- التفاضل والتكامل، كامل فليفل، 1999.

18- الرياضيات للصف الثاني الثانوي، وزارة التربية والتعليم (الاردن) 1998.